PROBLEMA 3. Se considera la función $f(x) = x\, e^{1-x^2}$, calculad:

a) El dominio, los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos. *(4 puntos)*

b) Las asíntotas y la gráfica de *f*. *(3 puntos)*

c) La integral $\int f(x)\, dx.$ *(3 puntos)*

Solución:

a) $f(x) = x\, e^{1-x^2}$

Dom f(x) = $\Re$.

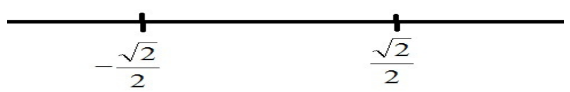
Monotonía.

$$f'(x) = e^{1-x^2} + x\, e^{1-x^2}\,(-2x) = e^{-x^2}\left(1-2x^2\right)$$

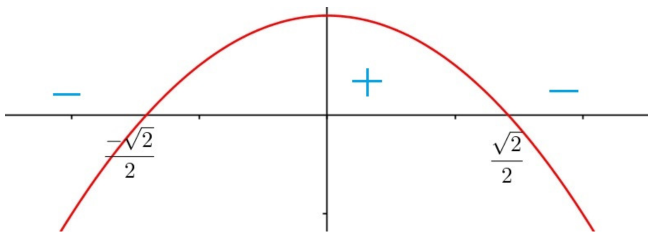
Estudiemos el signo de f´(x),

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; e^{1-x^2}\left(1-2x^2\right) = 0 \;\; \begin{cases} e^{1-x^2} = 0 & \text{sin } \textit{solución} \\ \left(1-2x^2\right) = 0 \rightarrow 2x^2 = 1 \rightarrow x^2 = \dfrac{1}{2} \rightarrow x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Debemos estudiar el signo de f´(x) en los intervalos:



En f´(x) el factor e^{1-x^2} *es siempre positivo y el factor* $\left(1-2x^2\right)$ *es un polinomio de 2º grado con coeficiente de* x^2 *negativo y raíces las obtenidas, por tanto:*



Luego, ***f(x) es creciente en*** $\left(\dfrac{-\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ***y decreciente en*** $\left(-\infty, \dfrac{-\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$.

Del estudio de la monotonía de f(x) deducimos que hay un máximo relativo en $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ *y un mínimo relativo en* $x = \dfrac{-\sqrt{2}}{2}$

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2} \;\rightarrow\; f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2\, e}}{2} \;\rightarrow\; \textit{Máximo relativo} \; \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2\, e}}{2}\right) \cong (0'7071, 1'1658)$$

$$x = \frac{-\sqrt{2}}{2} \;\rightarrow\; f\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{-\sqrt{2}}{2} e^{1-\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{-\sqrt{2}}{2} e^{\frac{1}{2}} = \frac{-\sqrt{2\, e}}{2} \;\rightarrow\; \textit{Mínimo relativo} \; \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2\, e}}{2}\right) \cong (-0'7071, -1'1658)$$

b) Asíntotas y gráfica de y = f(x)

Dom f(x) = $\Re$*, por tanto no tiene asíntotas verticales.*

Asíntota horizontal.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x\,e^{1-x^2}\right)=(\infty\cdot 0)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{e^{x^2-1}}\right)=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=(\text{aplicando L´Hopital})=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2\,x\,e^{x^2-1}}\right)=\frac{1}{\infty}=0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x\,e^{1-x^2}\right)=(\infty\cdot 0)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{e^{x^2-1}}\right)=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=(\text{aplicando L´Hopital})=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2\,x\,e^{x^2-1}}\right)=\frac{1}{\infty}=0$$

Por lo que la ***asíntota horizontal es y = 0.***

Asíntota oblícua.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x\,e^{1-x^2}}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(e^{1-x^2}\right)=e^{-\infty}=0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x\,e^{1-x^2}}{x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(e^{1-x^2}\right)=e^{-\infty}=0$$

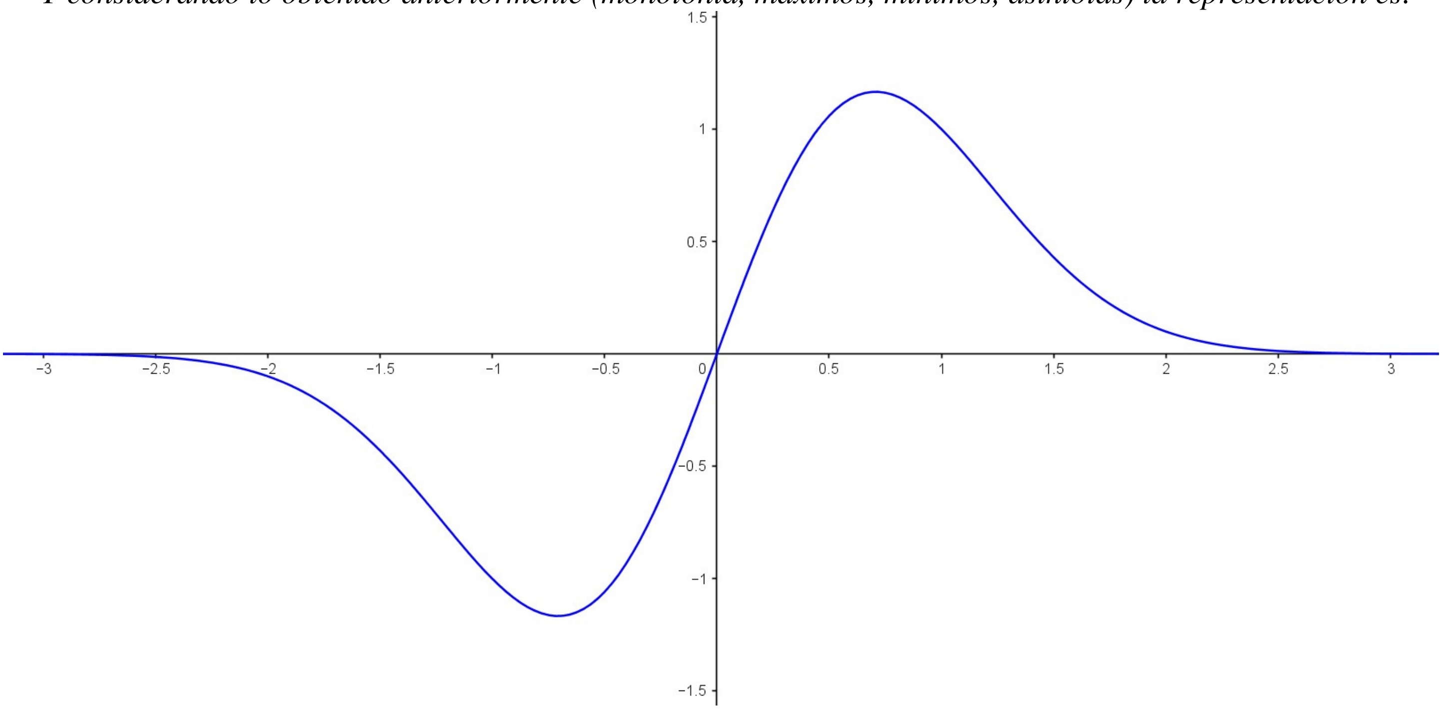
Por lo que no tiene ***asíntota oblícua.***

Representación gráfica.

Obtengamos sus puntos de corte con los ejes coordenados,

$$\left.\begin{array}{l} x=0 \quad\rightarrow\quad y=0\cdot e^{1-0^2}=0 \\ y=0 \quad\rightarrow\quad x\cdot e^{1-x^2}=0 \quad\rightarrow \left\langle\begin{array}{l} x=0 \\ e^{1-x^2}=0 \quad \text{sin solución}\end{array}\right. \end{array}\right\}\quad pto.\,corte \quad (0,0)$$

Y considerando lo obtenido anteriormente (monotonía, máximos, mínimos, asíntotas) la representación es:



c)

$$\int f(x)\,dx = \int x\,e^{1-x^2}\,dx = \left\{ \begin{array}{l} t = 1 - x^2 \\ dt = -2x\,dx \rightarrow \dfrac{dt}{-2} = x\,dx \end{array} \right\} = \int e^t\,\frac{dt}{-2} = \frac{-1}{2}\int e^t dt =$$

$$= \frac{-1}{2}\,e^t + C = \frac{-1}{2}\,e^{1-x^2} + C$$

$$\text{Luego} \quad \int f(x)\,dx = \frac{-1}{2}\,e^{1-x^2} + C$$