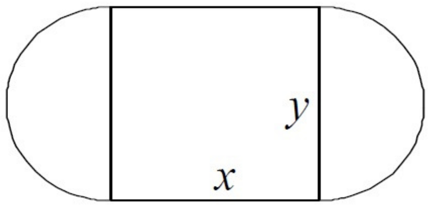
PROBLEMA 6. Queremos diseñar un campo de juego de modo que la parte central sea rectangular, y las partes laterales sean semicircunferencias hacia fuera. La superficie del campo mide (4 + π) metros cuadrados. Se quieren pintar todas las rayas de dicho campo tal y como se observa en la figura. Se pide:

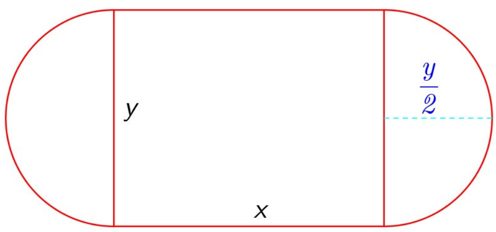
a) Escribid la longitud total de las rayas del campo en función de la altura y del rectángulo. *(5 puntos)*

b) Calculad las dimensiones del campo para que la pintura usada sea mínima. *(5 puntos)*



Solución:

El campo es:



un rectángulo de dimensiones x e y
y dos semicircunferencias de radio y/2.
Su superficie es de (4 + π) m².

a) La longitud de las rayas a pintar será:

Perímetro del rectángulo: $2x + 2y$

Perímetro de una semicircunferencia: $\pi\ y/2$

Las dos semicircunferencias: $2\pi\ y/2 = \pi\ y$

Por tanto: $\mathbf{L = 2x + 2y + \pi y}$

Para poder expresar L en función de y, hay que buscar la relación entre x e y.
La relación la obtendremos a partir del valor de la superficie del campo.
El campo está formado por un rectángulo y dos semicírculos,

- *rectángulo de lados x e y* $\rightarrow$ $A_R = x\,y$
- *dos semicírculos de radio y/2* $\rightarrow$ $A_{SC} = (1/2)\,\pi\,(y/2)^2 = (1/2)\,\pi\,(y^2/4) = \pi\,y^2/8$

el área de los dos semicírculos será: $2\pi y^2/8 = \pi y^2/4$

$$Superficie\ \ del\ campo = xy + \frac{\pi}{4}y^2. \qquad Luego \quad xy + \frac{\pi}{4}y^2 = 4 + \pi \qquad despejemos\ x$$

$$xy = 4 + \pi - \frac{\pi}{4}y^2 \quad \rightarrow \quad x = \frac{4 + \pi - \frac{\pi}{4}y^2}{y}$$

$$Luego, \quad L = 2\left(\frac{4 + \pi - \frac{\pi}{4}y^2}{y}\right) + 2y + \pi\ y = \frac{8 + 2\pi - \frac{\pi}{2}y^2}{y} + 2y + \pi\ y = \frac{8}{y} + \frac{2\pi}{y} - \frac{\pi}{2}y + 2y + \pi\ y =$$

$$= \frac{8 + 2\pi}{y} + 2y + \left(\pi - \frac{\pi}{2}\right)y = \frac{8 + 2\pi}{y} + 2y + \frac{\pi}{2}y$$

Solución: $L = \dfrac{8 + 2\pi}{y} + 2y + \dfrac{\pi}{2}y$

b) ¿Dimensiones del campo para que la pintura usada sea mínima?

Debemos minimizar L. Como y es la longitud de un lado, por definición, $y \geq 0$.

$$L = \frac{8+2\pi}{y} + 2y + \frac{\pi}{2} y$$

$$L' = \frac{-(8+2\pi)}{y^2} + 2 + \frac{\pi}{2}$$

$$L' = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{-(8+2\pi)}{y^2} + 2 + \frac{\pi}{2} = 0; \quad 2 + \frac{\pi}{2} = \frac{8+2\pi}{y^2}; \quad \frac{4+\pi}{2} = \frac{8+2\pi}{y^2}; \quad y^2 = \frac{16+4\pi}{4+\pi};$$

$$y^2 = \frac{4(4+\pi)}{4+\pi}; \quad y^2 = 4; \quad y = \pm\sqrt{4} = \pm 2$$

Como $y \geq 0$*, la solución obtenida es y = 2. Ahora podemos estudiar el signo de L´ en los intervalos (0,2) y* $(2,+\infty)$ *o calcular L´´. Calculemos L´´.*

Reescribimos la expresión de L´,

$$L' = \frac{-(8+2\pi)}{y^2} + 2 + \frac{\pi}{2} = -(8+2\pi)\, y^{-2} + 2 + \frac{\pi}{2}$$

$$L'' = -(8+2\pi)(-2)\, y^{-3} = (16+4\pi)\, y^{-3} = \frac{16+4\pi}{y^3}$$

Para $y = 2, \quad L'' = \frac{16+4\pi}{2^3} > 0$

Por tanto en y = 2 hay un mínimo relativo (el único extremo obtenido). Este mínimo relativo es el absoluto de L porque a la izquierda de 2 L es decreciente y a la derecha creciente.

$$y = 2 \quad \rightarrow \quad x = \frac{4+\pi-\frac{\pi}{4}2^2}{2} = \frac{4+\pi-\pi}{2} = 2$$

Solución: para que la pintura usada sea mínima las dimensiones del campo son la parte central un cuadrado de lado 2 m (x = y = 2) y las semicircunferencias laterales de radio 1 m.