Problema 3. Consideremos la función $f(x)=\dfrac{x-1}{x\,(x+2)}$. Obtened:

a) El dominio y las asíntotas de la función. *(2 puntos)*
b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de *f(x)*. *(4 puntos)*
c) La integral $\int f(x)\,dx$. *(4 puntos)*

Solución:

a) $f(x)=\dfrac{x-1}{x\,(x+2)}$

Dom f(x),

$$x\,(x+2)=0\left\langle\begin{array}{l}x=0\\ x+2=0\rightarrow x=-2\end{array}\right. \qquad \rightarrow \quad Dom\ f(x)=\Re-\{-2,0\}$$

Asíntotas,

verticales,

$$\lim_{x\to-2}\frac{x-1}{x\,(x+2)}=\frac{-3}{0}=\infty \quad\rightarrow\quad x=-2 \text{ es asíntota vertical.}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{x-1}{x\,(x+2)}=\frac{-1}{0}=\infty \quad\rightarrow\quad x=0 \text{ es asíntota vertical.}$$

horizontales,

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x-1}{x\,(x+2)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-1}{x^2+2x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=\frac{1}{\infty}=0\\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x\,(x+2)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x^2+2x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=\frac{1}{\infty}=0\end{array}\right\} \rightarrow \quad y=0 \text{ es la asíntota horizontal.}$$

oblicua, como la función es un cociente de dos polinomios al tener a. horizontal no tiene a. oblicua.

Por lo tanto, $Dom\ f(x)=\Re-\{-2,0\}$, ***las asíntotas verticales son x = – 2 y x = 0 y la asíntota horizontal es y = 0.***

b) ¿Monotonía de f(x)?

Para estudiar la monotonía de esta función, usaremos la siguiente expresión de ella:

$$f(x)=\frac{x-1}{x\,(x+2)} \quad\rightarrow\quad y=\frac{x-1}{x\,(x+2)}=\frac{x-1}{x^2+2x}$$

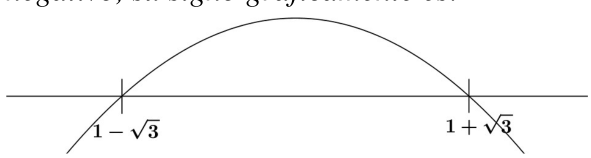
Debemos estudiar el signo de y´ en su dominio.

$$y'=\frac{1\,(x^2+2x)-(x-1)\,(2x+2)}{(x^2+2x)^2}=\frac{x^2+2x-(2x^2+2x-2x-2)}{(x^2+2x)^2}=\frac{x^2+2x-2x^2+2}{(x^2+2x)^2}=\frac{-x^2+2x+2}{(x^2+2x)^2}$$

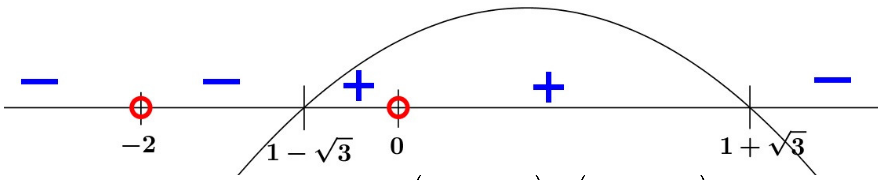
Como el denominador está elevado al cuadrado será positivo, luego el signo de y´ sólo depende del numerador. Obtengamos las raíces del numerador:

$$-x^2+2x+2=0 \quad\rightarrow\quad x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot(-1)\cdot2}}{2\cdot(-1)}=\frac{-2\pm\sqrt{12}}{-2}=\frac{-2\pm2\sqrt{3}}{-2}=1\pm\sqrt{3}=\left\langle\begin{array}{l}x_1=1-\sqrt{3}\approx-0'7321\\ x_2=1+\sqrt{3}\approx2'7321\end{array}\right.$$

Como $-x^2+2x+2$ *es un polinomio de segundo grado con las raíces obtenidas y coeficiente de* x^2 *negativo, su signo gráficamente es:*



Añadiendo los valores que no son del dominio de f(x):



Por tanto, ***f(x) es creciente en*** $\left(1-\sqrt{3},0\right)\cup\left(0,1+\sqrt{3}\right)$ ***y***

decreciente en $\left(-\infty,-2\right)\cup\left(-2,1-\sqrt{3}\right)\cup\left(1+\sqrt{3},+\infty\right)$.

c) $\displaystyle\int\frac{x-1}{x\left(x+2\right)}\,dx$

Es una integral racional,

$$\frac{x-1}{x\left(x+2\right)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+2}=\frac{A\,(x+2)+B\,x}{x\left(x+2\right)}\quad\rightarrow\quad x-1=A\,(x+2)+B\,x$$

$$x=-2\rightarrow\ -2-1=A\,(-2+2)+B\,(-2)\quad\rightarrow\quad -3=-2B\quad\rightarrow\quad B=\frac{3}{2}$$

$$x=0\rightarrow\quad 0-1=A\,(0+2)+B\cdot 0\quad\rightarrow\quad -1=2A\quad\rightarrow\quad A=\frac{-1}{2}$$

Entonces,

$$\int\frac{x-1}{x\left(x+2\right)}\,dx=\int\left(\frac{-1/2}{x}+\frac{3/2}{x+2}\right)dx=\int\frac{-1/2}{x}\,dx+\int\frac{3/2}{x+2}\,dx=$$

$$=\frac{-1}{2}Ln\left|x\right|+\frac{3}{2}Ln\left|x+2\right|+C$$

Solución: $\displaystyle\int\frac{x-1}{x\left(x+2\right)}\,dx=\frac{-1}{2}Ln\left|x\right|+\frac{3}{2}Ln\left|x+2\right|+C$