Problema 5.

a) Calcular indicando todos los pasos, la siguiente integral indefinida: *(5 puntos)*

$$\int \frac{18}{x^2-5x-14}dx.$$

b) Determinar, en función de t, el valor $\int_8^t \frac{18}{x^2-5x-14}dx.$ *(2 puntos)*

c) Determinar el valor de t mayor que 8 para que $\int_8^t \frac{18}{x^2-5x-14}dx$ *sea igual a* $\ln\frac{25}{4}.$

(2 puntos)

Solución:

a) Para calcular la integral definida dada, obtengamos las raíces del denominador del integrando:

$$x^2-5x-14=0 \quad \rightarrow \quad x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4.1.(-14)}}{2.1}=\frac{5\pm 9}{2}=\left\langle \begin{array}{l} x_1=\frac{5+9}{2}=7 \\ x_2=\frac{5-9}{2}=-2 \end{array}\right.$$

Descomponemos el integrando de la siguiente forma:

$$\frac{18}{x^2-5x-14}=\frac{18}{(x-7)\,(x+2)}=\frac{A}{x-7}+\frac{B}{x+2}=\frac{A(x+2)+B(x-7)}{(x-7)\,(x+2)} \quad \rightarrow \quad 18=A(x+2)+B(x-7)$$

$$Para \quad x=-2 \quad \rightarrow \quad 18=A(-2+2)+B(-2-7); \quad 18=-9B; \quad B=-2$$
$$Para \quad x=7 \quad \rightarrow \quad 18=A(7+2)+B(7-7); \quad 18=9A; \quad A=2$$

Por lo que:

$$\int\frac{18}{x^2-5x-14}dx=\int\left(\frac{2}{x-7}-\frac{2}{x+2}\right)dx=\int\frac{2}{x-7}dx-\int\frac{2}{x+2}dx = 2\ Ln|x-7|-2\ Ln|x+2|+C$$

Solución: $\int\frac{18}{x^2-5x-14}dx=2\ Ln|x-7|-2\ Ln|x+2|+C$

b) $\int_8^t \frac{18}{x^2-5x-14}dx.$

Hemos calculado la integral indefinida en el apartado anterior, por lo tanto:

$$\int_8^t \frac{18}{x^2-5x-14}dx=\left[2\ Ln|x-7|-2\ Ln|x+2|\right]_8^t=\left(2\ Ln|t-7|-2\ Ln|t+2|\right)-\left(2\ Ln|8-7|-2\ Ln|8+2|\right)=$$
$$=2\ Ln|t-7|-2\ Ln|t+2|-2\ Ln|1|+2\ Ln|10|=2\ Ln|t-7|-2\ Ln|t+2|+2\ Ln\ 10$$

Solución: $\int_8^t \frac{18}{x^2-5x-14}dx=2\ Ln|t-7|-2\ Ln|t+2|+2\ Ln\ 10$

c) ¿t? / t > 8 y $\int_8^t \frac{18}{x^2-5x-14}dx=Ln\frac{25}{4}$

A partir del resultado obtenido en el apartado anterior, la ecuación a resolver es:

$2\ Ln|t-7|-2\ Ln|t+2|+2\ Ln\ 10=Ln\ \frac{25}{4},$ *aplicando propiedades de los logaritmos:*

$$Ln\,(t-7)^2 - Ln\,(t+2)^2 + Ln\,10^2 = Ln\,\frac{25}{4}$$

$$Ln\,\frac{(t-7)^2}{(t+2)^2} + Ln\,100 = Ln\,\frac{25}{4}$$

$$Ln\,\frac{(t-7)^2 \cdot 100}{(t+2)^2} = Ln\,\frac{25}{4} \quad \rightarrow \quad \frac{(t-7)^2 \cdot 100}{(t+2)^2} = \frac{25}{4} \quad \rightarrow \quad 400\,(t-7)^2 = 25\,(t+2)^2$$

$$16\,(t-7)^2 = (t+2)^2; \quad 16\,(t^2-14t+49) = t^2+4t+4; \quad 16t^2-224t+784 = t^2+4t+4$$

$$15t^2-228t+780=0 \quad \rightarrow \quad t = \frac{-(-228) \pm \sqrt{(-228)^2-4.15.720}}{2.15} = \frac{228 \pm 72}{30} = \left\langle \begin{array}{l} t_1 = \dfrac{228+72}{30} = 10 > 8 \\ t_2 = \dfrac{228-72}{30} = \dfrac{26}{5} = 5'2 < 8 \end{array} \right.$$

Por tanto, ***solución t = 10***.