Problema 5. Consideremos la función $f(x)=\dfrac{x^2+3}{x^2-4}$. Obtener:

a) El dominio y los puntos de corte con los ejes. *(1 punto)*
b) Las asíntotas de la función. *(2 puntos)*
c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los extremos. *(3 puntos)*
d) La integral de la función *f(x)*. *(4 puntos)*

Solución:

a) $f(x)=\dfrac{x^2+3}{x^2-4}$

Dom f(x),

$$x^2-4=0; \quad x^2=4; \quad x=\pm\sqrt{4}=\pm 2 \quad \rightarrow \quad Dom\ f(x)=\Re-\{-2,2\}$$

Puntos de corte con

$$eje\ OY, \quad x=0 \quad \rightarrow \quad f(0)=\frac{0^2+3}{0^2-4}=\frac{-3}{4} \quad \rightarrow \quad \left(0,\frac{-3}{4}\right)$$

$$eje\ OX, \quad f(x)=0 \quad \rightarrow \quad \frac{x^2+3}{x^2-4}=0; \quad x^2+3=0; \quad x^2=-3,$$ *sin solución. f(x) no corta al eje OX.*

El dominio de f(x) es $\Re-\{-2,2\}$ ***y sólo corta al eje OY en el punto*** $\left(0,\frac{-3}{4}\right)$**.**

b) Asíntotas.

Verticales. Las posibles asíntotas verticales son x = – 2 y x = 2,

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2+3}{x^2-4}=\frac{(-2)^2+3}{(-2)^2-4}=\frac{7}{0}=\infty \quad \rightarrow \quad x=-2 \ \text{es asíntota vertical.}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+3}{x^2-4}=\frac{2^2+3}{2^2-4}=\frac{7}{0}=\infty \quad \rightarrow \quad x=2 \ \text{es asíntota vertical.}$$

Horizontales,

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^2+3}{x^2-4}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^2}{x^2}=\lim\limits_{x\to -\infty}1=1\\ \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2+3}{x^2-4}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2}{x^2}=\lim\limits_{x\to +\infty}1=1\end{array}\right\} \rightarrow \quad y=1 \ \text{es la asíntota horizontal.}$$

Oblicua, como la función es un cociente de dos polinomios al tener a. horizontal no tiene a. oblicua.

Por lo tanto, las asíntotas verticales son x = – 2 y x = 2 y la asíntota horizontal es y = 1.

c) Monotonía y extremos.

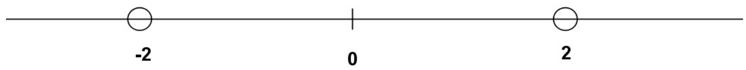
$$f(x)=\frac{x^2+3}{x^2-4}, \qquad f'(x)=\frac{2x\left(x^2-4\right)-\left(x^2+3\right)2x}{\left(x^2-4\right)^2}=\frac{2x^3-8x-2x^3-6x}{\left(x^2-4\right)^2}=\frac{-14x}{\left(x^2-4\right)^2}$$

Estudiemos el signo de f´(x). Obtengamos las raíces del numerador y denominador de f´(x).

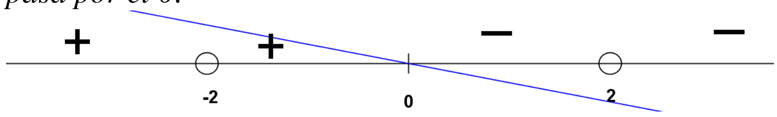
$-14x=0; \quad x=0$

$\left(x^2-4\right)^2=0; \quad x^2-4=0; \quad x^2=4; \quad x=\pm\sqrt{4}=\pm 2$

Considerando el dominio de f(x) = $\Re-\{-2, 2\}$, debemos estudiar el signo de f´(x) en los siguientes intervalos,



Como el denominador de f´(x) está elevado al cuadrado es positivo, por tanto el signo de f´(x) sólo depende del numerador que es un polinomio de primera grado (una línea recta) con coeficiente de x negativo que pasa por el 0:



Luego, ***f(x) es creciente en (– ∞, – 2) ∪ (– 2, 0) y es decreciente en (0, 2) ∪(2, + ∞).***

El único extremo de la función está en x = 0 y como la función pasa de creciente a decreciente es un máximo relativo.

La función f(x) sólo tiene un máximo relativo en $\left(0, \frac{-3}{4}\right)$.

d) $\int \frac{x^2+3}{x^2-4}\,dx$

Como los dos polinomios son del mismo grado efectuamos la división,

$$\frac{x^2+3}{x^2-4} = \frac{x^2-4+4+3}{x^2-4} = \frac{x^2-4}{x^2-4} + \frac{7}{x^2-4} = 1 + \frac{7}{x^2-4}$$

$$\text{Luego, } \int \frac{x^2+3}{x^2-4}\,dx = \int \left(1 + \frac{7}{x^2-4}\right) dx = \int 1\,dx + \int \frac{7}{x^2-4}\,dx = x + \int \frac{7}{x^2-4}\,dx$$

La integral pendiente es una integral racional,

$$\frac{7}{x^2-4} = \frac{7}{(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} = \frac{A\,(x+2) + B\,(x-2)}{(x-2)(x+2)} \quad \to \quad 7 = A\,(x+2) + B\,(x-2)$$

$$x=-2 \quad \to \quad 7 = A\,(-2+2) + B\,(-2-2) \quad \to \quad 7 = -4B \quad \to \quad B = \frac{-7}{4}$$

$$x=2 \quad \to \quad 7 = A\,(2+2) + B\,(2-2) \quad \to \quad 7 = 4A \quad \to \quad A = \frac{7}{4}$$

Entonces,

$$\int \frac{7}{x^2-4}\,dx = \int \left(\frac{7/4}{x-2} + \frac{-7/4}{x+2} \right) dx = \int \frac{7/4}{x-2}\,dx + \int \frac{-7/4}{x+2}\,dx = \frac{7}{4}\,Ln|x-2| - \frac{7}{4}\,Ln|x+2|$$

$$\text{Finalmente, } \int \frac{x^2+3}{x^2-4}\,dx = x + \frac{7}{4}\,Ln|x-2| - \frac{7}{4}\,Ln|x+2| + C$$