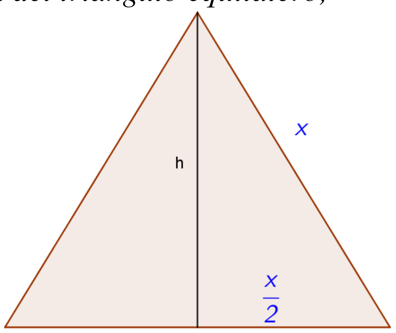
Problema 6. Se desea construir un cuadrado y un triángulo equilátero cortando en dos partes un cable de acero de 240 m. de longitud.

a) Calcular la suma de las áreas del triángulo y del cuadrado en función del valor x que corresponde con los metros que mide un lado del triángulo. *(3 puntos)*

b) Calcular la longitud de cable necesaria para construir el triángulo de modo que la suma de las áreas del triángulo y del cuadrado sea mínima y calcular el área mínima. *(7 puntos)*

Solución:
Se divide un alambre de longitud 240 m en dos partes.
Con una de ellas se construye un triángulo equilátero de lado x [la longitud de esta parte será 3 x]
y con la otra, de longitud 240 – 3 x, se construye un cuadrado [de lado (240 – 3 x) / 4]

a) Área del triángulo equilátero,



Aplicando el teorema de Pitágoras:

$$x^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + h^2 \;\rightarrow\; x^2 = \frac{x^2}{4} + h^2 \;\rightarrow\; h^2 = x^2 - \frac{x^2}{4} \;\rightarrow$$

$$h^2 = \frac{4x^2 - x^2}{4} \;\rightarrow\; h^2 = \frac{3x^2}{4} \;\rightarrow\; h = \frac{x\sqrt{3}}{2}$$

(como h es una longitud, h > 0)

Luego, $A_T = \dfrac{x\,\dfrac{x\sqrt{3}}{2}}{2} = \dfrac{\dfrac{x^2\sqrt{3}}{18}}{2} = \dfrac{x^2\sqrt{3}}{4}$

Área del cuadrado,

$$A_C = \left(\frac{240 - 3x}{4}\right)^2 = \frac{(240-3x)^2}{16}$$

La parte del cable usada para construir el cuadrado mide 240 – 3 x que deber ser positivo, luego
240 – 3 x > 0; 240 > 3 x; 3 x < 240; x < 80. Luego x ∈ [0, 80]

Finalmente, la suma de las áreas en función de la longitud del lado del triángulo, x, es

$$S(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 + \frac{(240-3x)^2}{16} \qquad 0 \le x \le 80, \text{ x en metros.}$$

b) ¿x? / S(x) sea mínima.

$$S'(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 2x + \frac{1}{16}\cdot 2(240-3x)\cdot(-3) = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{3}{8}(240-3x) = \frac{\sqrt{3}}{2}x - 90 + \frac{9}{8}x = \frac{4\sqrt{3}\,x + 9x}{8} - 90 =$$

$$= \frac{\left(4\sqrt{3}+9\right)x}{8} - 90$$

$$S'(x) = 0 \;\rightarrow\; \frac{\left(4\sqrt{3}+9\right)x}{8} - 90 = 0 \;\rightarrow\; \frac{\left(4\sqrt{3}+9\right)x}{8} = 90 \;\rightarrow\; \left(4\sqrt{3}+9\right)x = 720$$

$$x = \frac{720}{4\sqrt{3}+9} \cong 45'2028 \quad (\in [0, 80])$$

Como S´(x) es un polinomio de primer grado con coeficiente de x positivo, es una recta de pendiente positiva, entonces a la izquierda de su raíz es negativa y a la derecha positiva.

En x = 45´2028 hay un mínimo local y como f(x) a la izquierda es decreciente y a la derecha creciente, este mínimo local es el absoluto.

La función S(x) alcanza su mínimo para $x = \frac{720}{4\sqrt{3}+9} m \cong 45'2028\ m$

Por tanto, ***para que la suma de las áreas del triángulo y del cuadrado sea mínima el lado del triángulo debe ser de*** $\frac{720}{4\sqrt{3}+9} m$ ***y la longitud del cable para construir el triángulo será de*** $3\frac{720}{4\sqrt{3}+9} m \cong 135'6085\ m.$

El área mínima será: $S = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{720}{4\sqrt{3}+9}\right)^2 + \frac{\left(240 - 3\frac{720}{4\sqrt{3}+9}\right)^2}{16} \cong 1565'8710\ m^2$