Problema 5. Consideramos la función $f(x)=\dfrac{-2x^2+x+1}{2x^2+5x+2}$.

a) Comprobar que $x=-\dfrac{1}{2}$ es una discontinuidad evitable. *(2 puntos)*

b) Calcular los intervalos de crecimiento y decrecimiento. *(4 puntos)*

c) Obtener $\int f(x)\,dx.$ *(4 puntos)*

Solución:

a)

$$x=-\frac{1}{2} \quad \textit{es discontinuidad evitable de f(x) si} \quad \begin{cases} a)\ \textit{No existe} \quad f\left(\dfrac{-1}{2}\right) \quad y \\ b)\ \textit{Existe} \quad \lim\limits_{x\to -1/2} f(x) \end{cases}$$

$$a)\ f\left(-1/2\right)=\frac{-2\left(-1/2\right)^2+\left(-1/2\right)+1}{2\left(-1/2\right)^2+5\left(-1/2\right)+2}=\frac{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{2}-\frac{5}{2}+2}=\frac{0}{0} \quad \rightarrow \quad \textit{No existe } f\left(-1/2\right).$$

El cálculo realizado anteriormente indica que $\dfrac{-1}{2}$ *es raíz del numerador y denominador, por lo que podremos simplificar la expresión de f(x).*

$$-2x^2+x+1=0 \rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot(-2)\cdot 1}}{2\cdot(-2)}=\frac{-1\pm 3}{-4}=\begin{cases} x_1=\dfrac{-1+3}{-4}=\dfrac{-1}{2} \\ x_2=\dfrac{-1-3}{-4}=1 \end{cases} \rightarrow -2x^2+x+1=-2\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-1)$$

$$2x^2+5x+2=0 \rightarrow x=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\cdot 2\cdot 2}}{2\cdot 2}=\frac{-5\pm 3}{4}=\begin{cases} x_1=\dfrac{-5+3}{4}=\dfrac{-1}{2} \\ x_2=\dfrac{-5-3}{4}=-2 \end{cases} \rightarrow -2x^2+x+1=-2\left(x+\frac{1}{2}\right)(x+2)$$

$$\textit{Entonces} \quad f(x)=\frac{-2x^2+x+1}{2x^2+5x+2}=\frac{-2\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-1)}{-2\left(x+\frac{1}{2}\right)(x+2)}=\frac{-(x-1)}{x+2}=\frac{-x+1}{x+2}$$

$$b)\ \lim_{x\to -1/2} f(x)=\lim_{x\to -1/2}\frac{-x+1}{x+2}=\frac{-\left(-1/2\right)+1}{-1/2+2}=\frac{3/2}{3/2}=1 \quad \rightarrow \quad \textit{Existe } \lim_{x\to -1/2} f(x)$$

Hemos comprobado las dos condiciones por tanto f(x) tiene una discontinuidad evitable en x = $-1/2$.

b) Monotonía de f(x).

En el apartado anterior hemos obtenido las raíces del denominador de f(x). Por tanto sabemos que $Dom\, f(x) = \Re-\left\{-2, \dfrac{-1}{2}\right\}$.

También hemos simplificado la expresión de f(x) que será la que utilicemos para obtener f´(x).

$$f(x)=\frac{-x+1}{x+2}, \quad f'(x)=\frac{-1(x+2)-(-x+1)1}{(x+2)^2}=\frac{-x-2+x-1}{(x+2)^2}=\frac{-3}{(x+2)^2}$$

Como el denominador de f´(x) está elevado al cuadrado es positivo, por tanto el signo de f´(x) sólo depende del numerador que es un número negativo. Por tanto f´(x) es negativa en su dominio.

f(x) es decreciente en $\Re-\left\{-2,\frac{-1}{2}\right\}$.

c) $\int f(x)\,dx$

Para el cáculo de la integral utilizamos la expresión simplificada de $f(x)=\dfrac{-x+1}{x+2}$

Como los dos polinomios son del mismo grado efectuamos la división,

$$\frac{-x+1}{x+2}=\frac{-x-2+2+1}{x+2}=\frac{-x-2}{x+2}+\frac{3}{x+2}=-1+\frac{3}{x+2}$$

Luego, $\displaystyle\int\frac{-x+1}{x+2}dx=\int\left(-1+\frac{3}{x+2}\right)dx=\int(-1)\,dx+\int\frac{3}{x+2}dx=-x+3\,Ln|x+2|+C$

Finalmente, $\displaystyle\int f(x)\,dx=-x+3\,Ln|x+2|+C$