Problema 5. Considerar la función $f(x)=\dfrac{1}{x}+\ln(x+1)$. Obtener:

a) El dominio y las asíntotas de *f(x)*. *(2 puntos)*
b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de *f(x)* y sus máximos y mínimos. *(4 puntos)*
c) El área comprendida entre la curva *y=f(x)* y las rectas *y=0, x=1* y *x=2*. *(4 puntos)*

Solución:

a) $f(x)=\dfrac{1}{x}+\ln(x+1)$

Dom f(x),

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{x} \;\rightarrow\; x\neq 0 \\ \ln(x+1) \;\rightarrow\; x+1>0 \;\rightarrow\; x>-1 \end{array}\right\} \rightarrow \;\; Dom\; f(x)=(-1,0)\cup(0,+\infty)$$

Asíntotas,

Verticales. Las posibles asíntotas verticales son x = – 1 y x = 0,

$$\lim_{x\to -1}\left(\frac{1}{x}+\ln(x+1)\right)=\frac{1}{-1}+\ln(0)=-1+\infty=\infty \;\rightarrow\; x=-1 \text{ es asíntota vertical.}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}+\ln(x+1)\right)=\frac{1}{0}+\ln(1)=\infty+0=\infty \;\rightarrow\; x=0 \text{ es asíntota vertical.}$$

Horizontales,

$$\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{1}{x}+\ln(x+1)\right)=\frac{1}{+\infty}+\ln(+\infty)=0+(+\infty)=+\infty \;\rightarrow\; \text{no hay asíntota horizontal.}$$

Oblicua,

$y = m\,x + n$

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}+\ln(x+1)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{\ln(x+1)}{x}\right)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{1}{+\infty}=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x+1)}{x}=\left(\dfrac{+\infty}{+\infty}\right)\overset{*}{=}0\end{cases} \rightarrow \;\; m=0$$

** {como x es un infinito de orden superior a ln(x+1)}*

No hay asíntota oblicua por ser m = 0.

El dominio de f(x) es $(-1,0)\cup(0,+\infty)$ y sus asíntotas son x = – 1 y x = 0.

b) Monotonía y extremos.

$$f(x)=\frac{1}{x}+\ln(x+1),\qquad f'(x)=\frac{-1}{x^2}+\frac{1}{x+1}=\frac{-x-1+x^2}{x^2(x+1)}=\frac{x^2-x-1}{x^2(x+1)}$$

Estudiemos el signo de $f'(x)$. Obtengamos las raíces del numerador y denominador de $f'(x)$.

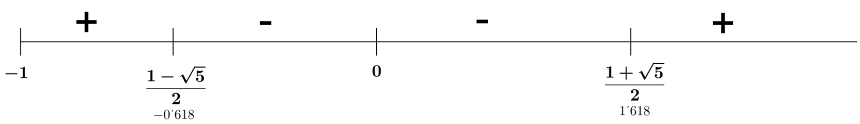
$$x^2-x-1=0 \quad\rightarrow\quad x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot 1\cdot(-1)}}{2\cdot 1}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}=\begin{cases} x_1=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\cong -0'618\in Dom\, f(x) \\ x_2=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\cong 1'618\in Dom\, f(x)\end{cases}$$

$$x^2(x+1)=0 \quad\rightarrow\quad \begin{cases} x^2=0 \quad\rightarrow\quad x=0 \\ x+1=0 \quad\rightarrow\quad x=-1\end{cases}$$

Considerando el dominio de f(x) = $(-1,0)\cup(0,+\infty)$*, debemos estudiar el signo de f´(x) en los siguientes intervalos,*

x	$f'(x)=\frac{-1}{x^2}+\frac{1}{x+1}$
$-0'7$	$\frac{-1}{(-0'7)^2}+\frac{1}{-0'7+1}=1'29...>0$
$-0'5$	$\frac{-1}{(-0'5)^2}+\frac{1}{-0'5+1}=-2<0$
1	$\frac{-1}{1^2}+\frac{1}{1+1}=-0'5<0$
2	$\frac{-1}{2^2}+\frac{1}{2+1}=0'083...>0$

Es decir:



f(x) es creciente en $\left(-1\,,\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\,,+\infty\right)$ ***y es decreciente en*** $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\,,0\right)\cup\left(0\,,\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

En $x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ *como la función pasa de creciente a decreciente hay un máximo relativo y*

en $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ *como la función pasa de decreciente a creciente hay un mínimo relativo.*

$$x=\frac{1-\sqrt{5}}{2},\quad f\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)=\frac{1}{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}+\ln\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}+1\right)=\frac{2}{1-\sqrt{5}}+\ln\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\cong -2'5805$$

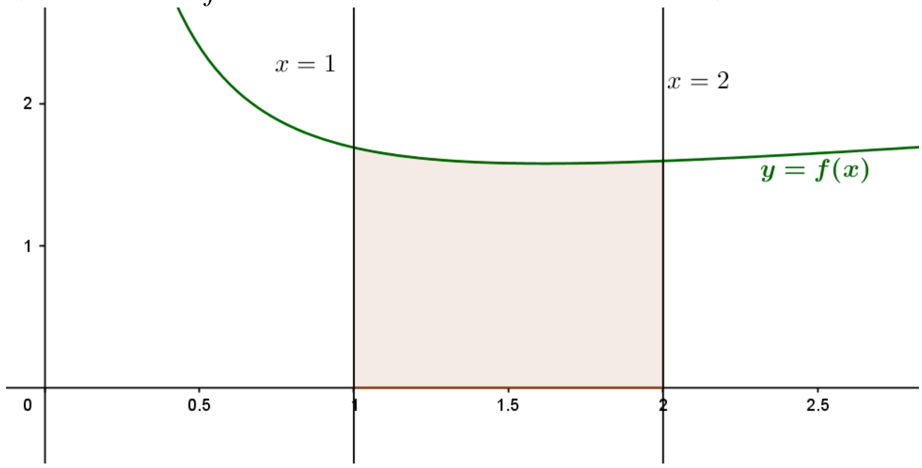
$$x=\frac{1+\sqrt{5}}{2},\quad f\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)=\frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}+\ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1\right)=\frac{2}{1+\sqrt{5}}+\ln\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\cong 1'5805$$

La función f(x) tiene un máximo relativo en $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2},\frac{2}{1-\sqrt{5}}+\ln\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\right)\cong(-0'618\,,-2'5805)$ ***y***

un mínimo relativo en $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2},\frac{2}{1+\sqrt{5}}+\ln\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\right)\cong(1'618\,,1'5805)$ **.**

c) Área entre f(x), y = 0, x = 1 y x =2

Nos interesa la función a ambos lado del mínimo relativo. El área a calcular gráficamente es:



El área la obtendremos mediante la siguiente integral definida $\int_1^2 \left(\frac{1}{x} + \ln(x+1)\right)dx$.

Los valores de x están comprendidos entre 1 y 2, por tanto podemos emplear indistintamente $\ln(x)$ *o* $\ln|x|$.

Calculamos la integral de cada uno de los sumandos,

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln(x)$$

$$\int \ln(x+1)\,dx = \left\{\begin{matrix} u = \ln(x+1) & \rightarrow & du = \dfrac{1}{x+1}dx \\ dv = dx & \rightarrow & v = x \end{matrix}\right\} = x\ln(x+1) - \int x\frac{1}{x+1}dx = x\ln(x+1) - \int \frac{x}{x+1}dx \overset{*}{=}$$

$$\left\{\frac{x}{x+1} = \frac{x+1-1}{x+1} = \frac{x+1}{x+1} - \frac{1}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1} \quad \rightarrow \quad \int \frac{x}{x+1}dx = \int 1\,dx - \int \frac{1}{x+1}dx = x - \ln(x+1)\right\}$$

$$\overset{*}{=} x\ln(x+1) - (x - \ln(x+1)) = x\ln(x+1) - x + \ln(x+1) = (x+1)\ln(x+1) - x$$

Entonces $\int \left(\frac{1}{x} + \ln(x+1)\right)dx = \ln(x) + (x+1)\ln(x+1) - x$,

$$\int_1^2 \left(\frac{1}{x} + \ln(x+1)\right)dx = \left[\ln(x) + (x+1)\ln(x+1) - x\right]_1^2 =$$

$$= [\ln(2) + (2+1)\ln(2+1) - 2] - [\ln(1) + (1+1)\ln(1+1) - 1] = \ln 2 + 3\ln 3 - 2 - (0 + 2\ln 2 - 1) =$$

$$= \ln 2 + 3\ln 3 - 2 - 2\ln 2 + 1 = 3\ln 3 - \ln 2 - 1 = \ln 27 - \ln 2 - 1 = \ln\left(\frac{27}{2}\right) - 1 \cong 1'6027$$

Solución: el área pedida es de $\ln\left[\left(\frac{27}{2}\right) - 1\right]$ *u.a.* $\cong$ *1´6027 u.a.*