

MATEMÁTICAS II

- Responda en el pliego en blanco a **cuatro** de las cinco preguntas que se proponen. De cada una de las seleccionadas conteste **una única opción**, A o B. Todas las preguntas se calificarán con un máximo de **2.5 puntos**.
- Agrupaciones de preguntas que sumen más de 10 puntos o que no coincidan con las indicadas conllevarán la **anulación** de la(s) última(s) pregunta(s) seleccionada(s) y/o respondida(s).

Pregunta 1. Opción A Dado $a \in \mathbb{R}$, se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ -3 & 2 & 2 \\ -5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

- (a) **(0.75 puntos)** Encuentre todos los valores de a para los cuales el sistema de ecuaciones homogéneo $AX = [0]$ tiene infinitas soluciones. ¿Existe algún valor de a para el cual el sistema no tenga solución? Razone sus respuestas.
- (b) **(0.75 punto)** Suponiendo que A es la matriz ampliada de un sistema de 3 ecuaciones lineales con 2 incógnitas. Calcule los valores de a para los cuales el sistema tiene solución.
- (c) **(1 punto)** Resuelva el sistema homogéneo de apartado (a), para el valor de $a = 0$.

Pregunta 1. Opción B Una matriz M verifica que $\det(M) = x$. (Los apartados siguientes son independientes.) Se pide:

- (a) **(1 punto)** Supongamos que la matriz M tiene 2 filas y 2 columnas, y que $M^2 = (x - 1) I$, siendo I la matriz identidad. Calcule todos los valores de $x \in \mathbb{R}$.
- (b) **(0.75 puntos)** Supongamos ahora que la matriz M tiene 3 filas y 3 columnas. Estudie si existe algún valor de x para el que pueda ser

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & x \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

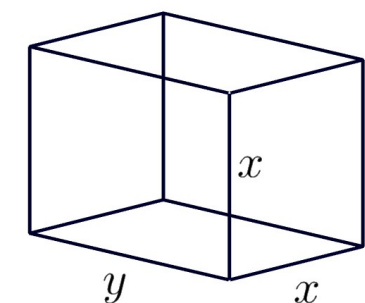
- (c) **(0.75 puntos)** Supongamos ahora que el tamaño de M es 3×3 , que $x \neq 0$ y que $M = xM^2$. Calcule los posibles valores de x y $\det(M^{-1})$ para cada uno de ellos.

Pregunta 2. Opción A Un depósito tiene una tubería de entrada de agua y un grifo. Se estudia la cantidad de agua del depósito en cada instante t a lo largo de 4 horas, teniendo en cuenta que en ocasiones se descarga por la apertura del grifo. Se observa que la cantidad de agua viene dada por la función: $f(t) = 2 \cos(t + \pi/2) + 10$, donde $t \in [0, 4]$. Se pide:

- (a) **(1 punto)** Calcular los máximos y mínimos de la función.
- (b) **(0.75 puntos)** Demostrar que el depósito no se vacía nunca.
- (c) **(0.75 puntos)** Deducir durante cuánto tiempo el depósito está aumentando el volumen de agua durante esas 4 horas.

Pregunta 2. Opción B

Se quiere construir una caja sin tapa de forma que tenga dos caras paralelas cuadradas de lado x y tres caras rectangulares, dos de ellas paralelas, de lados x e y , como la figura. Si se quiere utilizar 3 m^2 de material, calcule los valores de x e y para que la capacidad de la caja sea máxima.



Pregunta 3. Opción A Dada la función $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$. Se pide:

- (a) **(1.25 puntos)** Una primitiva de la función f que en 0 valga 1.
- (b) **(1.25 puntos)** Calcular el área encerrada entre la gráfica de f , el eje X y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.

Pregunta 3. Opción B Se sabe que la función $G(x) = \frac{1}{3}x^3 + ax^2 + bx + 5$ es una primitiva de una función g , donde $a, b \in \mathbb{R}$ son valores desconocidos, pero constantes. Se pide:

- (a) **(1 punto)** Determinar la función $g(x)$ en función de los parámetros a y b
- (b) **(0.5 puntos)** ¿Podría dar la forma de todas las primitivas de g en función de una constante K ?
- (c) **(1 punto)** Sabiendo que $g(1) = 2$ y $g(0) = 1$, determinar la función g .

Pregunta 4. Opción A Se consideran los puntos $A(1, 1, 1)$ y $B(-1, 1, 3)$. Se pide que:

- (a) **(1 punto)** Encuentre la ecuación del plano que pasa por el punto medio entre A y B y es perpendicular a la recta que los contiene.
- (b) **(1 punto)** Calcule las distancias de A y B al plano π .
- (c) **(0.5 puntos)** Tome un punto cualquiera del plano π , distinto del calculado en el apartado (a). Calcule su distancia a A y a B y compruebe que es la misma.

Pregunta 4. Opción B Se considera la recta $r \equiv \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv 2x + y + \beta z = 3$. Se pide:

- (a) **(0.75 puntos)** Calcular, en caso de que exista, el valor de $\beta \in \mathbb{R}$ que hace que r y π sean paralelos.
- (b) **(0.75 puntos)** Calcular, en caso de que exista, el valor de β para que el plano y la recta sean perpendiculares.
- (c) **(1 punto)** Para $\beta = 0$, calcular el simétrico del punto $(-1, 0, 1)$ respecto del plano π .

Pregunta 5. Opción A Supongamos que tenemos en un monedero 5 monedas de 1 euro, 3 de 2 euros y 2 de 10 céntimos.

- (a) **(1.25 puntos)** Si sacamos 3 monedas al azar del monedero ¿cuál es la probabilidad de que al menos una sea de 1 euro?
- (b) **(1.25 puntos)** Sacamos dos monedas una tras otra (sin reemplazamiento) ¿cuál es la probabilidad de que la segunda sea de 10 céntimos?

Pregunta 5. Opción B La esperanza de vida de un elefante sigue una distribución normal de media 82 años y desviación típica 30.

- (a) **(0.75 puntos)** ¿Qué porcentaje de población de elefantes se espera que viva más de 100 años?
- (b) **(0.75 puntos)** Si se toma una muestra de 4 elefantes, ¿cuál es la probabilidad de que al menos uno supere los 100 años de vida?
- (c) **(1 punto)** Calcula un valor $a \in \mathbb{R}$ que haga que el 98 % de los elefantes tengan una esperanza de vida menor o igual que $82 + a$.

* Algunos valores de la función de distribución $N(0, 1)$ son: $F(x) = P(Z \leq x)$, $F(0) = 0.5$, $F(0.15) = 0.6$, $F(0.6) = 0.7257$, $F(2.06) = 0.98$, $F(0.98) = 0.8365$.

Si tus valores no están entre los expuestos, toma el más cercano.