

No es permet l'ús de calculadores gràfiques ni programables, ni de dispositius que puguin transmetre o emmagatzemar informació. Es poden usar regles i bolígrafs de colors (excepte vermell i verd).

Part A. Contestau el problema A1, i contestau també un problema a escollir entre el problema A2 i el problema A3 (total 4 pt).

Problema A1 (obligatori). — Donats dos esdeveniments, A i B , d'un experiment aleatori, sabem que $P(A) = 0.5$, que $P(B) = 0.1$, i que $P(A | B) = x$, on $x \in [0, 1]$. Es demana:

- a) Existeix algun valor de x per al qual els esdeveniments siguin independents? (1 pt)
- b) Per a quin valor de x es té que la probabilitat de $A \cap B$ és màxima? (1 pt)

Problema A2. — L'Institut Nacional d'Estadística (INE) disposa d'aquestes dades, per al 2023, sobre la quantitat d'habitants a Espanya per nacionalitat i sexe:

	Espanyols	Estrangers
Homes	20.6 milions	3.0 milions
Dones	21.2 milions	3.3 milions

- a) Escollint un habitant a l'atzar, quina és la probabilitat que sigui estranger? (1 pt)
- b) Escollint dos habitants a l'atzar de manera independent, quina és la probabilitat que almenys un sigui estranger? (1 pt)

Problema A3. — Suposem que, quan un client entra en una botiga d'electrodomèstics, el temps que hi passa dedins ve donat per una variable aleatòria X que segueix una distribució normal de mitjana poblacional $\mu = 15$ minuts i desviació típica $\sigma = 10$ minuts: $X \sim \mathcal{N}(15, 10)$.

- a) Quina és la probabilitat que un client estigui dins la botiga 25 minuts o menys? (1 pt)
- b) Quina és la probabilitat que un client estigui dins la botiga entre 5 i 25 minuts? (1 pt)

Part B. Escolliu només un problema d'aquesta part (total 3 pt).

Problema B1. — En una fàbrica tèxtil fabricam vestits, samarretes i faldes.

- Cada vestit requereix 5 m² de teixit i 5 botons.
 - Cada samarreta requereix 4 m² de teixit i 3 botons.
 - Cada falda requereix 4 m² de teixit i cap botó.
- a) Si volem fabricar 10 vestits, 15 samarretes i 20 faldes, quants m² de teixit i quants botons necessitam? **(0.5 pt)**
- b) Resol el sistema d'equacions següent:

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 4 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 120 \end{pmatrix}.$$

(1.5 pt)

- c) Si disposam de 100 m² de teixit i 120 botons, podem utilitzar completament els recursos fabricant productes? **(1 pt)**

Problema B2. — Considera les matrius quadrades A , B , M , i N de mida 3×3 .

- a) Calcula tots els valors de x tals que $A^2 = A$, on:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & x & 4 \\ 9 & x & 6 \\ -6 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

(1 pt)

- b) Troba una matriu B invertible, tal que $B^2 = B$. **(1 pt)**
- c) Donades dues matrius M i N invertibles tals que $M^2 = M$ i $N^2 = N$, construïm la matriu següent: $C = N \cdot M \cdot N^{-1}$. És cert que $C^2 = C$? **(1 pt)**

Part C. Escolliu només un problema d'aquesta part (total 3 pt).

Problema C1. — Restringits al domini $x \in [0, 20]$, considera les tres funcions següents:

$$f(x) = x(10 - x), \quad g(x) = 125 - 20x, \quad h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } 0 \leq x \leq 15, \\ g(x) & \text{si } 15 < x \leq 20. \end{cases}$$

- a) Per a quins x es té que $f(x) = g(x)$? Per a quins x es té que $f'(x) = g'(x)$? (1 pt)
- b) Estudia la continuïtat de la funció $h(x)$. (1 pt)
- c) És la funció $h(x)$ derivable? En quins intervals és creixent? (1 pt)

Problema C2. — Considera la funció $f(x) = 10^x + x^{10}$, per a $x \in (0, +\infty)$.

- a) Calcula $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ i $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$. (1 pt)
- b) Calcula $f'(x)$. (1 pt)
- c) Calcula justificadament $\int_0^1 f'(x) dx$. (1 pt)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula de la distribució normal $\mathcal{N}(0,1)$.