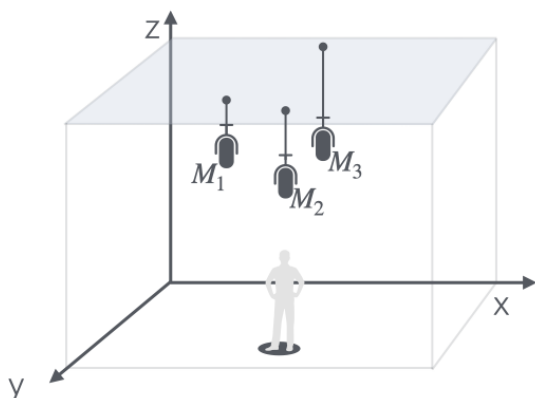


La prova consta de cinc preguntes: les tres primeres obligatòries, i a la quarta i cinquena es pot triar entre dues opcions. En cas de contestar dos problemes d'una mateixa part, només s'avaluarà el primer. Vegeu la puntuació a cada exercici.

Justifiqueu les respostes usant llenguatge matemàtic i/o no matemàtic, segons correspongui. Es permet utilitzar calculadora científica bàsica, però NO es permet l'ús de calculadores gràfiques ni programables, ni de dispositius que puguin transmetre o emmagatzemar informació. Es poden usar regles i bolígrafs de colors (excepte vermell i verd).

**Part A.** (preguntes 1, 2 i 3). Contestau TOTES les preguntes d'aquesta part.

**Problema 1.** — En un estudi de gravació s'han col·locat tres micròfons penjats del sostre amb cables de diferents longituds per enregistrar un concert acústic.



Considerant un sistema de referència en què l'origen es troba al terra de la sala, el sostre de l'estudi es troba a una altura de 7m tal com es mostra representat en la figura.

Els micròfons es col·loquen en les posicions següents:

- Micròfon 1 ( $M_1$ ): coordenades  $x = 2$ ,  $y = 3$ , penjant del sostre amb un cable de longitud 1 m.
- Micròfon 2 ( $M_2$ ): coordenades  $x = 4$ ,  $y = 4$ , penjant del sostre amb un cable de longitud 2 m.
- Micròfon 3 ( $M_3$ ): coordenades  $x = 5$ ,  $y = 1$ , penjant del sostre amb un cable de longitud 3 m.

Durant l'assaig, un músic es col·loca en el punt  $P(4, 3, 0)$ , que representa la seva posició sobre l'escenari.

- [1 punt] Determina les coordenades dels tres micròfons i calcula l'equació del pla que els conté.
- [1 punt] Sigui  $\pi$  el pla que conté els micròfons  $M_1$ ,  $M_2$ , i  $M_3$ . Per tal de millorar la qualitat del so, es vol col·locar un quart micròfon  $M_4$  de manera que sigui la projecció ortogonal del punt  $P$  sobre el pla  $\pi$ . Determina les coordenades d'aquest quart micròfon.

**Problema 2.** — [2 punts] Sigui  $f(x) = \frac{4x^3}{x^2 + 1} \ln(x)$ . Calcula  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ .

**Problema 3.** — Una plataforma d'estríming de videojocs ha analitzat els hàbits dels seus usuaris durant un any. L'estudi mostra que el 40 % dels usuaris juguen principalment a jocs competitiu en línia. D'entre aquests usuaris competitiu, el 30 % participa habitualment en tornejos oficials. En canvi, entre els usuaris que no juguen principalment a jocs competitiu, se sap que el 20 % també participa en tornejos oficials.

- (a) [0.5 punts] Si se selecciona aleatòriament un usuari que no juga principalment a jocs competitiu, quina és la probabilitat que no participi en tornejos oficials?
- (b) [1.5 punts] Si se selecciona aleatòriament un usuari i se sap que participa en tornejos oficials, que és més probable, que jugui principalment a jocs competitiu o no?

**Part B.** (preguntes 4 i 5).

**Problema 4.** — Contestau només UNA de les següents preguntes (P4.1 o P4.2)

**P4.1** Es pretén estudiar la intensitat del senyal elèctric registrat per un elèctrode implantat en una àrea del còrtex cerebral. La intensitat del senyal  $I(t)$  (en microvolts) en funció del temps  $t$  (en mil·lisegons) després d'un estímul ve donada per la funció

$$I(t) = 50te^{-0.2t}, \quad t \geq 0.$$

- (a) [1 punt] Calcula en quin instant de temps la intensitat del senyal és màxima i quina és aquesta intensitat.
- (b) [1 punt] Calcula una primitiva de la funció  $I(t)$ , és a dir, determina  $\int I(t) dt$ .

**P4.2** [2 punts] La desviació vertical d'un dron,  $y(t)$  (en metres), respecte d'una altura de referència després d'una pertorbació inicial, es descriu al llarg del temps  $t$  (en segons) com

$$y(t) = \frac{t^3 + t^2 + 2t - 1}{t^4 + 2}, \quad t \geq 0,$$

on els valors positius de  $y(t)$  indiquen que el dron es troba per sobre de l'altura de referència, mentre que els valors negatius indiquen que es troba per sota d'aquesta.

Demuestra que existeix almenys un instant de temps  $t$  en què el dron es troba exactament a l'altura de referència.

**Problema 5.** — Contestau només UNA de les següents preguntes (P5.1 o P5.2)

**P5.1** Siguin  $A$  i  $B$  dues matrius  $3 \times 3$  tals que  $A$  és invertible i

$$AB + A + I = 2A,$$

amb  $I$  la matriu identitat de dimensió  $3 \times 3$ .

(a) [1 punt] Calcula la inversa de  $A$  en funció de  $I$  i  $B$ .

(b) [1 punt] Siguin

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

calcula  $\mathbf{x}$  tal que  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ , on  $A$  compleix la igualtat de l'enunciat.

**P5.2** [2 punts] En un estudi de mescles químiques, es preparen tres components químics utilitzant tres substàncies diferents. Les quantitats (en litres) de cada substància utilitzada són  $x$ ,  $y$  i  $z$ .

Les condicions experimentals imposen les relacions següents:

$$\begin{cases} x + y + z = 3, \\ 2x + y + z = 4, \\ x + y + mz = 3, \end{cases}$$

on  $m \geq 0$  és un paràmetre real que depèn de la concentració d'un catalitzador.

Discuteix, segons els valors del paràmetre  $m$ , si es poden determinar o no les quantitats de cada substància.