

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente a una pregunta en cada uno de los **cuatro** bloques, tres de ellos con optatividad y uno sin optatividad. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.**

CALIFICACIÓN: Cada bloque se calificará sobre 2.5 puntos.

TIEMPO: 90 minutos.

Bloque 1. (Calificación máxima: 2.5 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes:

Pregunta 1.1. Sea el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real k :

$$\begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ k+1 & 1 & -k \\ 1 & k+1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ k \\ 2k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \text{ Se pide:}$$

a) (1.5 puntos) Discutir el sistema en función de los valores de k .

b) (1 punto) Resolver el sistema para $k = 0$.

Pregunta 1.2. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$, se pide:

a) (1.5 puntos) Hallar las matrices simétricas B que verifiquen $BA = (A + A^2)B$.

b) (1 punto) Con la matriz $A_1 = A$, se consideran las matrices $A_2 = A_1^2 + A_1$, $A_3 = A_2^2 + A_2$, $A_4 = A_3^2 + A_3$ y así sucesivamente. Hallar A_{2025} .

Bloque 2. (Calificación: 2.5 puntos) Responda a la pregunta siguiente:

Pregunta 2. Un agricultor dispone de 120 metros de valla para delimitar una parcela con forma de pentágono. Los vértices del pentágono se nombrarán consecutivamente como A , B , C , D y E . Se sabe que A , B , D y E forman un rectángulo, y que el punto C se encuentra en el exterior de este rectángulo, formando un triángulo equilátero con los puntos B y D .

¿A qué distancia del vértice A el agricultor debe ubicar los vértices B y E si quiere que la parcela tenga la mayor área posible?

Bloque 3. (Calificación máxima: 2.5 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes:

Pregunta 3.1. Sean los puntos $A(1, 1, 2)$, $B(2, -1, 0)$, $C(-2, 0, 3)$ y $D(2, -3, -1)$ y la recta:

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = y+1 = \frac{z}{-1}.$$

- a) (0.5 puntos) Compruebe que los puntos no son coplanarios y calcule el volumen del tetraedro determinado por ellos.
- b) (1 punto) Calcule el área de la cara del tetraedro $ABCD$ determinada por los puntos A , B y C y la longitud de la altura del tetraedro que parte del vértice D .
- c) (1 punto) Calcule la distancia entre la recta r y la recta determinada por los puntos B y D .

Pregunta 3.2. Dados los puntos $A(0, 0, 1)$ y $B(1, 0, 1)$, se pide:

- a) (1 punto) Hallar una ecuación del plano paralelo al eje OZ y que pasa por los puntos A y B .
- b) (1.5 puntos) Hallar una ecuación de una recta perpendicular al plano $z = 1$ que diste una unidad tanto del punto A como del punto B .

Bloque 4. (Calificación máxima: 2.5 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes:

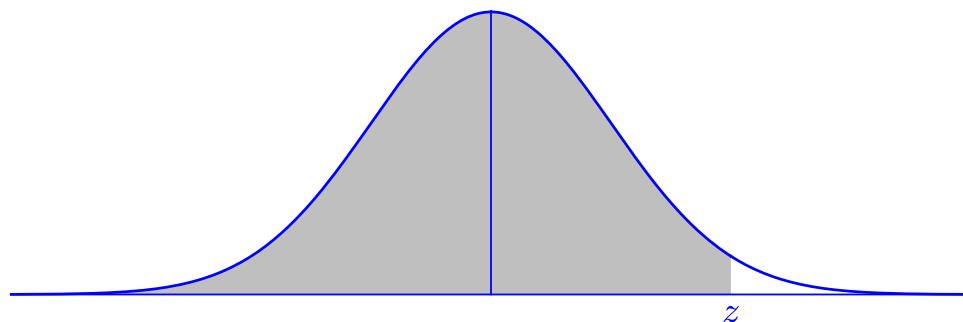
Pregunta 4.1. En base a un estudio de los datos antropométricos de la población laboral española en hombres se considera que la masa, en kilogramos, de un individuo de esta población es una variable normal de media 75.67 y desviación típica 11.05. Se pide:

- a) (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que un hombre de esta población elegido al azar tenga masa entre 60 y 80 kilogramos.
- b) (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que un hombre de esta población elegido al azar tenga masa superior a 100 kilogramos.
- c) (1 punto) Elegidos diez hombres distintos al azar en esta población calcular la probabilidad de que no más de uno supere los 100 kilogramos.

Pregunta 4.2. La probabilidad de que un corredor sufra una caída en un día con lluvia es de 0.08 y en un día seco es de 0.004. La probabilidad de que llueva y se caiga es de 0.032. Hoy un corredor ha salido. Se pide:

- a) (1.25 puntos) Calcular la probabilidad de que vuelva a casa sin haberse caído.
- b) (1.25 puntos) Hallar la probabilidad de que, sabiendo que se ha caído, no esté lloviendo.

DISTRIBUCIÓN NORMAL



Ejemplo: si Z tiene distribución $N(0, 1)$, $P(Z < 0,45) = 0,6736$.

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

MATEMÁTICAS II

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN

En cada pregunta, aunque el procedimiento seguido sea diferente al propuesto en el documento soluciones, cualquier argumento válido que conduzca a la solución será valorado con la puntuación asignada.

Los contenidos correspondientes al bloque F se evaluarán transversalmente en cualquiera de los ejercicios. Se penalizará en la calificación de cada respuesta la falta de justificación razonada o de precisión y se valorarán las estrategias, razonamientos y toma adecuada de decisiones.

1.1.

a) Estudio correcto de cada caso ($k = 0$, $k = -1$ y $k \notin \{0, -1\}$): 0.5 puntos por cada uno. Si únicamente se determinan los dos valores críticos ($k = 0$ y $k = -1$): 0.25 puntos.

b) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.

1.2.

a) Condición de matriz simétrica: 0.25 puntos. Planteamiento del sistema de ecuaciones: 0.75 puntos. Resolución: 0.5 puntos.

b) Cálculo de las tres primeras matrices: 0.5 puntos. Resolución de la recurrencia: 0.5 puntos.

2.

Planteamiento: 1.5 puntos. Resolución: 1 punto.

3.1.

a) Comprobar que los puntos no son coplanarios: 0.25 puntos. Cálculo del volumen del tetraedro: 0.25 puntos.

b) Planteamiento para calcular el área de la cara del tetraedro: 0.25 puntos. Resolución: 0.25 puntos.

Planteamiento del cálculo de la altura: 0.25 puntos. Resolución: 0.25 puntos.

c) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.

3.2.

a) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.

b) Planteamiento: 1 punto. Resolución: 0.5 puntos.

Dar una solución es suficiente para otorgar la puntuación máxima.

4.1.

a) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.25 puntos.

b) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.25 puntos.

c) Planteamiento: 0.75 puntos. Resolución: 0.25 puntos.

4.2.

a) Planteamiento: 0.75 puntos. Resolución: 0.5 puntos.

b) Planteamiento: 0.75 puntos. Resolución: 0.5 puntos.

MATEMÁTICAS II–SOLUCIONES
(Documento de trabajo orientativo)

1.1.

a) Sea A la matriz de coeficientes del sistema. Como $\det(A) = k(k+1)^2$, el determinante se anula si $k = 0$ o $k = -1$.

Si $k \neq 0$ y $k \neq -1$, entonces el rango de la matriz de coeficientes y de la ampliada es 3. El sistema es compatible determinado.

Si $k = 0$, el rango de la matriz de coeficientes y de la ampliada es 2, menor que el número de incógnitas. El sistema es compatible indeterminado.

Si $k = -1$, el rango de la matriz de coeficientes es 2 y el de la ampliada 3. El sistema es incompatible.

b) Para $k = 0$, el sistema es compatible indeterminado. La solución del sistema es $\{(t, -t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

1.2.

a) Una matriz B es simétrica si $B = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$, entonces $A + A^2 = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Por lo tanto la relación queda como sigue:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}.$$

Las ecuaciones que se obtienen son: $a - b = -3a - 5b$, $5a - 3b = -3b - 5c$, $b - c = a + b$, $5b - 3c = b + c$. La solución del sistema es: $a = \lambda$, $b = c = -\lambda$, es decir,

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & -\lambda \\ -\lambda & -\lambda \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

b) Siendo $A_1 = A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$, $A_2 = A_1 + A_1^2 = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Por tanto, $A_3 = A_2 + A_2^2 = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ y las matrices se repiten alternando A_1 y A_2 . Se concluye que $A_{2025} = A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$.

2.

Sean x e y las distancias de A a B y de A a E , respectivamente. El área del rectángulo $ABDE$ es xy y la del triángulo equilátero BCD es $\frac{\sqrt{3}}{4}y^2$, además el perímetro del pentágono es $120 = 2x + 3y$. Como $x = (120 - 3y)/2$ e y tienen que ser mayor que cero, $y \in (0, 40)$. Por lo tanto, el área total es: $AT(y) = y \frac{(120 - 3y)}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}y^2$, con $y \in (0, 40)$. Tenemos que $AT'(y) = 60 - (3 - \frac{\sqrt{3}}{2})y$, en $y_0 = \frac{120}{6 - \sqrt{3}} = \frac{40}{11}(6 + \sqrt{3})$ la derivada anterior se anula, además si $y < y_0 \Rightarrow AT'(y) > 0$, si $y > y_0 \Rightarrow AT'(y) < 0$. Como $y_0 \in (0, 40)$ porque $6 + \sqrt{3} < 11$, se sabe que y_0 es un máximo absoluto en el intervalo $(0, 40)$. Por lo tanto, para tener un área máxima las distancias de A a E y de A a B deben ser $y = \frac{40}{11}(6 + \sqrt{3}) \approx 28.117$ metros y $x = 60 \frac{3 - \sqrt{3}}{6 - \sqrt{3}} = \frac{60}{11}(5 - \sqrt{3}) \approx 17.825$ metros, respectivamente.

3.1.

a) El $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = -3 \neq 0$. Por lo tanto, los puntos no son coplanarios. El volumen del tetraedro es: $V = \frac{1}{6} \cdot |-3| = \frac{1}{2}$.

b) El área de la cara del tetraedro es $\frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\| = \frac{3}{2} \sqrt{10}$. Como el volumen de un tetraedro se puede también calcular como $\frac{1}{3} \cdot A(\text{base}) \cdot h$, usando el apartado a) y el área calculada en este apartado, igualamos: $\frac{1}{2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} \sqrt{10} \cdot h$. De donde: $h = \frac{\sqrt{10}}{10}$.

c) Sean $\vec{v}_r$ y P_r respectivamente el vector director y un punto de r . Las rectas se cruzan: $\text{rango}(\vec{v}_r, \overrightarrow{BD}) = 2$, $\text{rango}(\vec{v}_r, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{PB}) = 3$. La distancia entre dos rectas que se cruzan es igual, en este caso, a la distancia entre el punto B y el plano paralelo a la recta que pasa por B y D que contiene a r . La ecuación de dicho plano π se obtiene como sigue:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -3x + 2y - 4z + 5 = 0.$$

$$\text{La distancia es } d(B, \pi) = \frac{|-3(2) + 2(-1) - 4(0) + 5|}{\sqrt{(-3)^2 + 2^2 + (-4)^2}} = \frac{3\sqrt{29}}{29} \approx 0.557.$$

3.2.

a) El vector normal del plano $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times (0, 0, 1) = (1, 0, 0) \times (0, 0, 1) = (0, -1, 0)$, siendo el plano $y = 0$.

b) Como A y B son puntos del plano $z = 1$, la recta buscada pasa por un punto $P(x_0, y_0, 1)$ a determinar del plano $z = 1$. Como $\vec{v} = (0, 0, 1)$ es un vector normal del plano $z = 1$, $r \equiv (x, y, z) = (x_0, y_0, \lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ es la recta perpendicular al plano $z = 1$ que pasa por el punto P . Las distancias de A a r y de B a r tienen que ser igual a uno, por lo tanto, $\frac{\|\vec{v} \times \overrightarrow{PA}\|}{\|\vec{v}\|} = \frac{\|(-y_0, x_0, 0)\|}{\|(0, 0, 1)\|} = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = 1$ y $\frac{\|\vec{v} \times \overrightarrow{PB}\|}{\|\vec{v}\|} = \frac{\|(-y_0, x_0 - 1, 0)\|}{\|(0, 0, 1)\|} = \sqrt{(x_0 - 1)^2 + y_0^2} = 1$.

Resolviendo estas dos ecuaciones tenemos que, $x_0 = \frac{1}{2}$ e $y_0 = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$. Por lo tanto la recta buscada podría ser: $r_1 \equiv (x, y, z) = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \lambda)$ o $r_2 \equiv (x, y, z) = (\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, \lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

4.1.

Denotemos por X la variable aleatoria “masa, en kilogramos, del cuerpo de un hombre de la población laboral española del estudio”, que es una variable aleatoria Normal($\mu = 75.67$, $\sigma = 11.05$).

a) Para hallar la probabilidad que nos piden calculamos $P(60 \leq X \leq 80)$ que coincide tipificando a $P(\frac{60-75.67}{11.05} \leq Z \leq \frac{80-75.67}{11.05})$, con Z la distribución normal de media 0 y desviación típica 1. De la tabla de esta distribución se tiene

$$\begin{aligned} P(60 \leq X \leq 80) &= P(\frac{60-75.67}{11.05} \leq Z \leq \frac{80-75.67}{11.05}) \approx P(-1.42 \leq Z \leq 0.39) = P(Z \leq 0.39) - P(Z < -1.42) \\ &= 0.6517 - (1 - 0.9222) = 0.5739. \end{aligned}$$

b) Nos piden $P(X > 100) = P(Z > \frac{100-75.67}{11.05})$, con Z la distribución de la normal de media 0 y desviación típica 1. De la tabla de esta distribución se tiene así que

$$P(X > 100) = P(Z > \frac{100-75.67}{11.05}) \approx P(Z \geq 2.20) = 1 - P(Z < 2.20) = 1 - 0.9861 = 0.0139.$$

c) Sea $p = P(X > 100)$ la probabilidad calculada en el apartado anterior. Si T es la variable aleatoria “número de hombres con masa superior a 100 kilogramos de entre 10 elegidos al azar en esta población”, es una variable con distribución Binomial($n = 10$, $p = 0.0139$). Nos piden calcular

$$P(T \leq 1) = P(T = 0) + P(T = 1) = (1 - p)^{10} + 10p(1 - p)^9 \approx 0.9919.$$

4.2.

$LL \equiv$ Día lluvioso. $\overline{LL} \equiv$ Día no lluvioso. $C \equiv$ El corredor se cae. $\overline{C} \equiv$ Corredor ileso.

a) Como $P(LL \cap C) = P(LL) \cdot P(C | LL) \Rightarrow P(LL) = \frac{0.032}{0.08} = 0.4$.

$$P(\overline{C}) = P(LL) \cdot P(\overline{C} | LL) + P(\overline{LL}) \cdot P(\overline{C} | \overline{LL}) = 0.4 \cdot 0.92 + 0.6 \cdot 0.996 = 0.9656.$$

b) $P(\overline{LL} | C) = \frac{0.6 \cdot 0.004}{1 - 0.9656} \approx 0.0698$.