O exame consta de **4 preguntas de resposta obrigatoria**: a primeira sen apartados optativos e as tres seguintes con posibilidade de elección entre apartados. Deben xustificarse todas as respostas.

## PREGUNTA 1. ESTATÍSTICA E PROBABILIDADE. (2 puntos)

**CONTEXTO**
Renfe opera un servizo Alvia entre Santiago de Compostela e Barcelona-Sants. Os datos históricos mostran que, en condicións operativas habituais, o tempo de viaxe segue unha distribución normal cunha media de 765 minutos e unha desviación típica de 18 minutos.

Con todo, durante os meses de inverno é frecuente que se produzan incidencias meteorolóxicas que obrigan a reducir a velocidade en certos tramos da ruta. Isto ocorre aproximadamente o 30 % dos días da temporada. Cando se activa o protocolo por incidencia, a distribución do tempo de viaxe segue a ser normal, pero pasa a ter unha media de 810 minutos e unha desviación típica de 40 minutos.

A compañía ferroviaria define que existe un "retraso significativo" cando o tempo de viaxe supera os 780 minutos nun día sen incidencias, ou os 840 minutos nun día con incidencia meteorolóxica declarada.

**Responda estes dous apartados: 1.1. e 1.2.**
*(Será preciso usar algún ou algúns dos seguintes valores, aínda que non todos (enténdase que $Z$ segue unha distribución $N(0,1)$):* $\boldsymbol{P(Z \leq 0.3)} = 0.6179$*,* $\boldsymbol{P(Z \leq 0.75)} = 0.7734$*,* $\boldsymbol{P(Z \leq 0.83)} = 0.7967$*,* $\boldsymbol{P(Z \leq 1.125)} = 0.8697$*,* $\boldsymbol{P(Z \leq 4.16)} = 1$*.)*

**1.1.** Polo contexto, sábese que $P(R|\bar{I}) = P(X > 780)$ e que $P(R|I) = P(Y > 840)$. Explique o significado dos sucesos $I$ e $R$ e das variables aleatorias $X$ e $Y$. Logo, determine a probabilidade de que, seleccionando ao azar un día da temporada invernal, este tren Alvia experimente un retraso significativo segundo a definición da compañía.

**1.2.** Calcule a probabilidade de que, nun día con incidencia meteorolóxica activa, o tren complete a súa viaxe nun tempo inferior a 765 minutos, que é o tempo medio en condicións habituais.

## PREGUNTA 2. ÁLXEBRA. (2 puntos)

**Responda un destes dous apartados: 2.1. ou 2.2.**

**2.1.** Considérese a igualdade matricial $A(X - I)B = C$, onde $X$ é cadrada e $I$ é a matriz identidade.

**2.1.1.** Despexe $X$ supoñendo que $A$ e $B$ son cadradas e invertibles.
**2.1.2.** Que dimensións teñen $X$ e $B$ se $A$ e $C$ son matrices $1 \times 2$? Obteña $X$, simétrica e tal que os elementos da súa diagonal sumen 0, se $A = (1 \quad 1)$, $B = I$ e $C = (0 \quad 0)$.

**2.2.** Discuta, segundo os valores do parámetro $m$, o sistema

$$\begin{cases} (m-4)x & & + & 5z & = & 9, \\ & (m-1)y & + & 6z & = & m+8, \\ (m-4)x & + \ (m-1)y & + & 7z & = & m+9. \end{cases}$$

## PREGUNTA 3. ANÁLISE. (4 puntos)

**Responda dous destes tres apartados: 3.1., 3.2., 3.3.**

**3.1.** Para cada un dos seguintes casos, debuxe, cando sexa posible, a gráfica dunha función que cumpra as propiedades indicadas:

a) Continua pero non derivable en $x = 0$.
b) Continua en $[a, b]$, con $f(a)f(b) < 0$, e cuxa gráfica corte ao eixe $x$ en máis dun punto do intervalo $(a, b)$.
c) Continua en $[a, b]$, derivable en $(a, b)$, con $f(a)f(b) < 0$, $f' > 0$ en $(a, b)$, e cuxa gráfica corte ao eixe $x$ en máis dun punto do intervalo $(a, b)$.
d) Dúas veces derivable en $\mathbb{R}$, con $f'' > 0$ en $\mathbb{R}$ e monótona en $\mathbb{R}$.

**3.2.** Calcule os seguintes límites:

a) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln x}{x}$.   b) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x-1}{\ln x}$.

c) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan x}{\sin x}$.   d) $\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x} \ln x$.

**3.3.** Calcule o valor que ten que tomar o parámetro positivo $a$ para que a área da rexión encerrada pola gráfica da función $f(x) = ax^2 - 2ax$ e o eixe $x$ sexa igual a 10 unidades de superficie. Faga un debuxo da rexión.

## PREGUNTA 4. XEOMETRÍA. (2 puntos)

**Responda un destes dous apartados: 4.1. ou 4.2.**

**4.1.** Sexa $r$ a recta que pasa pola orixe e por $P'$, sendo $P'$ o punto simétrico de $P(1,0,1)$ con respecto ao punto $Q(0,1,0)$. Pídese:

**4.1.1.** Obteña $P'$ e as ecuacións paramétricas de $r$.
**4.1.2.** Determine a ecuación implícita do plano que pasa pola orixe e é perpendicular a $r$.

**4.2.** Considérense os puntos $P(1,0,1)$, $Q(0,1,0)$ e $R(1,1,1)$.

**4.2.1.** Demostre que $P$, $Q$ e $R$ non están aliñados e obteña a ecuación implícita do plano $\pi$ que pasa por eles.
**4.2.2.** Calcule o valor ou valores de $a$ que fan que a distancia do punto $S(a, 0,0)$ a ese plano $\pi$ sexa igual a $\sqrt{2}$ unidades de lonxitude.

El examen consta de **4 preguntas de respuesta obligatoria**: la primera sin apartados optativos y las tres siguientes con posibilidad de elección entre apartados. Deben justificarse todas las respuestas.

## PREGUNTA 1. ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD. (2 puntos)

**CONTEXTO**

Renfe opera un servicio Alvia entre Santiago de Compostela y Barcelona-Sants. Los datos históricos muestran que, en condiciones operativas habituales, el tiempo de viaje sigue una distribución normal con una media de 765 minutos y una desviación típica de 18 minutos.

Sin embargo, durante los meses de invierno es frecuente que se produzcan incidencias meteorológicas que obligan a reducir la velocidad en ciertos tramos de la ruta. Esto ocurre aproximadamente el 30 % de los días de la temporada. Cuando se activa el protocolo por incidencia, la distribución del tiempo de viaje sigue siendo normal, pero pasa a tener una media de 810 minutos y una desviación típica de 40 minutos.

La compañía ferroviaria define que existe un "retraso significativo" cuando el tiempo de viaje supera los 780 minutos en un día sin incidencias, o los 840 minutos en un día con incidencia meteorológica declarada.

**Responda estos dos apartados: 1.1. y 1.2.**

*(Será preciso usar alguno o algunos de los siguientes valores, aunque no todos (entiéndase que $Z$ sigue una distribución $N(0,1)$):* $\boldsymbol{P(Z \leq 0.3)} = 0.6179$, $\boldsymbol{P(Z \leq 0.75)} = 0.7734$, $\boldsymbol{P(Z \leq 0.83)} = 0.7967$, $\boldsymbol{P(Z \leq 1.125)} = 0.8697$, $\boldsymbol{P(Z \leq 4.16)} = 1$.*)*

**1.1.** Por el contexto, se sabe que $P(R|\bar{I}) = P(X > 780)$ y que $P(R|I) = P(Y > 840)$. Explique el significado de los sucesos $I$ y $R$ y de las variables aleatorias $X$ e $Y$. Luego, determine la probabilidad de que, seleccionando al azar un día de la temporada invernal, este tren Alvia experimente un retraso significativo según la definición de la compañía.

**1.2.** Calcule la probabilidad de que, en un día con incidencia meteorológica activa, el tren complete su viaje en un tiempo inferior a 765 minutos, que es el tiempo medio en condiciones habituales.

## PREGUNTA 2. ÁLGEBRA. (2 puntos)

**Responda uno de estos dos apartados: 2.1. o 2.2.**

**2.1.** Considérese la igualdad matricial $A(X - I)B = C$, donde $X$ es cuadrada e $I$ es la matriz identidad.

**2.1.1.** Despeje $X$ suponiendo que $A$ y $B$ son cuadradas e invertibles.

**2.1.2.** ¿Qué dimensiones tienen $X$ y $B$ si $A$ y $C$ son matrices $1 \times 2$? Obtenga $X$, simétrica y tal que los elementos de su diagonal sumen 0, si $A = (1 \quad 1)$, $B = I$ y $C = (0 \quad 0)$.

**2.2.** Discuta, según los valores del parámetro $m$, el sistema

$$\begin{cases} (m-4)x & & + & 5z & = & 9, \\ & (m-1)y & + & 6z & = & m+8, \\ (m-4)x & + (m-1)y & + & 7z & = & m+9. \end{cases}$$

## PREGUNTA 3. ANÁLISIS. (4 puntos)

**Responda dos de estos tres apartados: 3.1., 3.2., 3.3.**

**3.1.** Para cada uno de los siguientes casos, dibuje, cuando sea posible, la gráfica de una función que cumpla las propiedades indicadas:

a) Continua pero no derivable en $x = 0$.
b) Continua en $[a, b]$, con $f(a)f(b) < 0$, y cuya gráfica corte al eje $x$ en más de un punto del intervalo $(a, b)$.
c) Continua en $[a, b]$, derivable en $(a, b)$, con $f(a)f(b) < 0$, $f' > 0$ en $(a, b)$, y cuya gráfica corte al eje $x$ en más de un punto del intervalo $(a, b)$.
d) Dos veces derivable en $\mathbb{R}$, con $f'' > 0$ en $\mathbb{R}$ y monótona en $\mathbb{R}$.

**3.2.** Calcule los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln x}{x}$.  b) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x-1}{\ln x}$.

c) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan x}{\sin x}$.  d) $\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x} \ln x$.

**3.3.** Calcule el valor que tiene que tomar el parámetro positivo $a$ para que el área de la región encerrada por la gráfica de la función $f(x) = ax^2 - 2ax$ y el eje $x$ sea igual a 10 unidades de superficie. Haga un dibujo de la región.

## PREGUNTA 4. GEOMETRÍA. (2 puntos)

**Responda uno de estos dos apartados: 4.1. o 4.2.**

**4.1.** Sea $r$ la recta que pasa por el origen y por $P'$, siendo $P'$ el punto simétrico de $P(1,0,1)$ con respecto al punto $Q(0,1,0)$. Se pide:

**4.1.1.** Obtenga $P'$ y las ecuaciones paramétricas de $r$.
**4.1.2.** Determine la ecuación implícita del plano que pasa por el origen y es perpendicular a $r$.

**4.2.** Considérense los puntos $P(1,0,1)$, $Q(0,1,0)$ y $R(1,1,1)$.

**4.2.1.** Demuestre que $P$, $Q$ y $R$ no están alineados y obtenga la ecuación implícita del plano $\pi$ que pasa por ellos.
**4.2.2.** Calcule el valor o valores de $a$ que hacen que la distancia del punto $S(a, 0,0)$ a ese plano $\pi$ sea igual a $\sqrt{2}$ unidades de longitud.