UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

Prueba de Acceso a la Universidad (PAU)
Curso 2024–2025
ASIGNATURA: MATEMÁTICAS II

El examen consta de una primera pregunta de carácter competencial y obligatoria. Además, hay 3 preguntas más con posibilidad de elección entre apartados.

Cada pregunta se puntúa con 2,5 puntos.

Todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables ni gráficas ni con capacidad de almacenar o trasmitir datos. Si el estudiante es sorprendido con una calculadora no autorizada, podrá ser expulsado del examen; en todo caso, se le retirará la calculadora sin que tenga derecho a que le proporcionen otra.

APARTADO 1. ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD (2,5 puntos)

Para iluminar una estancia se requiere instalar focos. El tiempo de vida de los focos es una variable normal con media de 2000 horas. Se sabe que, tomando un foco al azar la probabilidad de que luzca más de 1800 horas es 0.8289. Calcula:

a) la desviación típica de la distribución, (1 punto).

b) cuántas horas de vida debe tener un foco para estar en el percentil 90, (0,5 puntos).

c) el porcentaje de focos que no tendrán una duración aceptable, considerando como duración aceptable al menos 1600 horas, (1 punto).

(Véase la tabla simplificada de la **normal tipificada** que aparece al final del examen)

APARTADO 2. ANÁLISIS (2,5 puntos)

Responda a uno de los dos apartados 2.1 o 2.2

2.1 (2,5 puntos) Un campo de atletismo de 1 km de perímetro consiste en un rectángulo con un semicírculo en cada uno de dos lados opuestos. Hallar las dimensiones del campo para que el área de la parte rectangular sea lo mayor posible.

2.2 (2,5 puntos) Sea la curva $y = Ax - x^2$, $A \in \mathbb{R}^+$. Determina el valor de A para que el área encerrada entre la curva y y el eje de abcisas sea 36. Representa la curva.

APARTADO 3. NÚMEROS Y ÁLGEBRA (2,5 puntos)

Responda a uno de los dos apartados 3.1 o 3.2

3.1 Responda a los dos subapartados siguientes.

a) (1,25 puntos) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$. Halla las matrices X e Y soluciones del sistema,

$$\left\{ \begin{array}{ll} 2X - 3Y & = A. \\ X - Y & = B. \end{array} \right.$$

b) (1,25 puntos) En una fábrica se produce queso y mantequilla. Para fabricar una unidad de queso se precisan 10 unidades de leche y 6 horas de mano de obra. Para la mantequilla, se necesitan 5 unidades de leche y 8 horas de mano de obra por unidad. Sabiendo que tenemos disponibles cada día 100000 unidades de leche y 110000 horas de mano de obra, calcular la producción posible de queso y de mantequilla considerando que utilizamos todo lo disponible.

3.2 Responda a los dos subapartados siguientes.

a) (1,25 puntos) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 8 & -9 \\ 6 & -7 \end{pmatrix}$, halla las matrices X y X^{-1} tal que $XAX^{-1} = B$.

b) (1,25 puntos) Determina la relación entre a y b, con $a, b \in \mathbb{R}$ conocidos, para que el sistema

$$\left\{ \begin{array}{ll} 2x + y - 3z & = a \\ -2x - y + 3z & = b \end{array} \right.$$

sea compatible. ¿Puede ser compatible determinado?.

APARTADO 4. GEOMETRÍA (2,5 puntos)

Responda a uno de los dos apartados 4.1 o 4.2

4.1 Responda a los dos subapartados siguientes.

a) (1,25 puntos) Dados los planos de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 2, \\ 2x+y-z & = & 4, \\ mx+y+3z & = & 6, \\ x-2z & = & m, \end{array}\right.$$

Determina el valor del parámetro m para que los planos se corten en un punto. En este caso, determina el punto de corte.

b) (1,25 puntos) Calcula la distancia de la recta $r \equiv \dfrac{x-3}{-1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z+2}{5}$ al plano $\pi : -x-3y+z+4=0$.

4.2 Responda a los tres subapartados siguientes.

a) (0,5 puntos) Dado el punto $P \equiv (0,2,1)$, halla la ecuación del plano que contiene a P y es paralelo a $\pi : 2x-5y+z+3=0$.

b) (0,5 puntos) Dado el punto $P \equiv (1,0,-3)$, halla la ecuación del plano que contiene a P y es perpendicular a la recta r:

$$r \equiv \left\{\begin{array}{rcl} 5x+y-z & = & 4, \\ 2x-2y-z & = & 5. \end{array}\right.$$

c) (1.5 puntos) Calcula la distancia entre las rectas

$$r \equiv \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 5+\lambda, \\ y & = & -1, \\ z & = & 8+2\lambda, \end{array}\right. \qquad s \equiv \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 2+3\mu, \\ y & = & 2-\mu, \\ z & = & -1+4\mu. \end{array}\right.$$

Tabla simplificada de la distribución normal tipificada

z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

Prueba de Acceso a la Universidad (PAU)
Curso 2024–2025
ASIGNATURA: MATEMÁTICAS II

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN

1. En cada apartado se puntuará: por tipificar la variable se puntuará 0,25 puntos, usar propiedades de la distribución normal 0,5 puntos y buscar en la tabla 0,25 puntos.

a) Tipificar la variable, usar propiedades de la normal y buscar en la tabla, (1 punto).

b) Tipificar la variable y buscar en la tabla, (0,5 puntos).

c) Tipificar la variable, usar propiedades de la normal y buscar en la tabla, (1 punto).

2.1 Planteamiento del problema, llegando a la expresión de la función a optimizar, (1 punto). Cálculo de la primera derivada (0,5 puntos). Cálculo del extremo relativo (0,5 puntos). Comprobar que es un máximo, (0,5 puntos).

2.2 Cálculo de los puntos de corte con el eje de abcisas (0,5 puntos). Representación gráfica, (0,5 punto). Planteamiento del problema mediante la integral definida, (0,5 puntos). Cálculo de la primitiva, (0,5 puntos). Aplicar Regla de Barrow, (0,5 puntos).

3.1 a) Resolver el sistema operando matricialmente para obtener X e Y, (1,25 puntos).

b) Planteamiento del sistema, (0,75 puntos). Resolución del sistema, (0,5 puntos).

3.2 a) Operar matricialmente y determinar las matrices X, (1 punto). Obtener la matriz X^{-1}, (0,25 puntos).

b) Determina la relación entre a y b, (0,75 puntos). Razonar que no puede ser compatible determinado, (0,5 puntos).

4.1 a) Aplicar eliminación Gaussiana o determinantes para ver que es un sistema compatible determinado para $m = 2$, (1 punto). Dar el punto de corte, (0,25 puntos).

b) Establecer condición de ortogonalidad entre el vector director de la recta r, $\overline{d_r}$, y el vector normal del plano, $\overline{n}$, (0,5 puntos). Calcular la distancia de la recta al plano, (0,75 puntos).

4.2 a) Plantear la ecuación del plano, sustituir el punto y obtener el plano, (0,5 puntos).

b) Obtener el vector director de la recta e imponer condición de ortogonalidad con el vector $\overline{PX}$, (0,5 puntos).

c) Obtener el vector genérico, $\overline{RS}$, que es perpendicular a las dos rectas, (0,5 puntos). Obtener y resolver el sistema lineal que resulta de imponer perpendicularidad, (0,5 puntos). Calcular la distancia entre las rectas, (0,5 puntos).