**INFORMACIÓN SOBRE LA PAU**

**CURSO 2025/2026**

# MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

## 1. COMPETENCIAS ESPECÍFICAS, CRITERIOS DE EVALUACIÓN Y SABERES BÁSICOS.

En la materia Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II el 100 % de la calificación de la prueba se obtiene evaluando las competencias específicas, desarrolladas en criterios específicos, y saberes básicos recogidos en el Real Decreto 243/2022, de 5 de abril, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas del Bachillerato (BOE del 6 de abril de 2022) y desarrollados a nivel autonómico en el Decreto 60/2022 , de 30 de agosto, por el que se regula la ordenación y se establece el currículo de Bachillerato en el Principado de Asturias (BOPA del 1 de septiembre de 2022).

En cada ejercicio se considerarán unos saberes básicos y unas competencias específicas de entre las que figuran en la tabla siguiente (los números de las competencias se refieren a las establecidas en el Decreto 60/2022). Los criterios de evaluación aplicables serán los criterios específicos asociados a cada competencia en el Decreto 60/2022.

| | |
|---|---|
| **Ejercicio 1** | |
| Competencias | CE1, CE2, CE3, CE6, CE7 y CE8 |
| Saberes | **Sentido de la medida**: Medición; Cambio. |
| **Ejercicio 2** | |
| Competencias | CE1, CE4, CE5, CE6, CE7 y CE8 |
| Saberes | **Sentido algebraico**: Patrones; Modelo matemático; Relaciones y funciones: Pensamiento computacional. |
| **Ejercicio 3** | |
| Competencias | CE2, CE3, CE4, CE5, CE7 y CE8 |
| Saberes | **Sentido algebraico**: Igualdad y desigualdad.<br>**Sentido numérico**: Sentido de las operaciones; Relaciones. |
| **Ejercicio 4** | |
| Competencias | CE1, CE2, CE3, CE6 y CE8 |
| Saberes | **Sentido estocástico**: Incertidumbre. |
| **Ejercicio 5** | |
| Competencias | CE1, CE2, CE3, CE5, CE6 y CE8 |
| Saberes | **Sentido estocástico**: Distribuciones de probabilidad; Inferencia. |

## 2. ESTRUCTURA DE LA PRUEBA, CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN Y CALIFICACIÓN Y MATERIALES NECESARIOS.

La prueba constará de cinco ejercicios (cada uno de ellos con una puntuación de 2,5 puntos) y el alumnado deberá seleccionar cuatro de ellos. En cada ejercicio, el alumnado deberá elegir una de las dos opciones propuestas. Todos los ejercicios plantearán preguntas **abiertas**.

Los objetivos generales que se pretenden valorar en el examen, en consonancia con los expresados en el Marco Teórico de PISA 2022, son:

- Capacidad de utilizar el pensamiento crítico y la creatividad para modelar problemas de diversos contextos (personal, ocupacional, social, científico, etc.) y expresarlos en lenguaje matemático.
- Capacidad para manejar con soltura los saberes básicos y los procedimientos adecuados para resolver el problema modelado matemáticamente y dar una respuesta adecuada al mismo.
- Capacidad para investigar, interpretar y evaluar el significado de las soluciones matemáticas y comunicarlas de forma efectiva en el contexto de partida del problema.

Las preguntas pueden resolverse por cualquier procedimiento válido. La calificación otorgada a cada pregunta/apartado será expresada, salvo excepciones, en fracciones mínimas de 0,25 puntos y la calificación de la prueba se expresará en una escala de 0 a 10 puntos. Para obtener la puntuación máxima en cada pregunta se deberá **responder razonadamente** a todos sus apartados, **explicando los pasos** seguidos para llegar a cada respuesta.

Además de los materiales generales que se utilizarán en todas las pruebas, para la de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II se recomienda que el alumnado lleve una calculadora. No está permitido el uso de ninguna calculadora que presente alguna de las prestaciones siguientes: posibilidad de trasmitir datos, programable, pantalla gráfica, resolución de ecuaciones, operaciones con matrices, cálculo de determinantes, derivadas e integrales, almacenamiento de datos alfanuméricos.

En particular, las calculadoras que contengan alguna de las teclas que se muestran a continuación no están permitidas. Esas teclas sirven para:

- Resolver integrales u operar con matrices


- Representación gráfica. Estas suelen tener, además, pantallas muy grandes

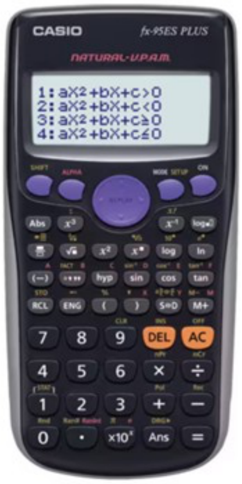

- Cálculos simbólicos (resolver ecuaciones).


- Programar

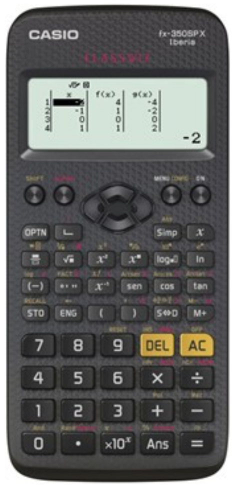

Por otro lado, los modelos fx-350SP X y fx-350LA PLUS de Casio no presentan ninguna de las teclas anteriores, pero permiten realizar cálculo matricial, por lo que tampoco están permitidas.

fx-350LA PLUS


fx-95ES PLUS




fx-350SP X




Las indicaciones anteriores **no son exhaustivas**, pero cubren la gran mayoría de las calculadoras no permitidas en la prueba de la EBAU.

## 3. MODELO DE EXAMEN

## MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

- ➢ Responda en el pliego en blanco a **cuatro** de las cinco preguntas que se proponen. De cada una de las seleccionadas conteste **una única opción**, A o B. Todas las preguntas se calificarán con un máximo de **2.5 puntos**.
- ➢ Agrupaciones de preguntas que sumen más de 10 puntos o no coincidan con las indicadas conllevarán la **anulación** de la(s) última(s) pregunta(s) seleccionada(s) y/o respondida(s).

**Pregunta 1. Opción A.** La velocidad de una montaña rusa, medida en km/h, durante los 20 primeros segundos del recorrido se puede aproximar por la siguiente función:

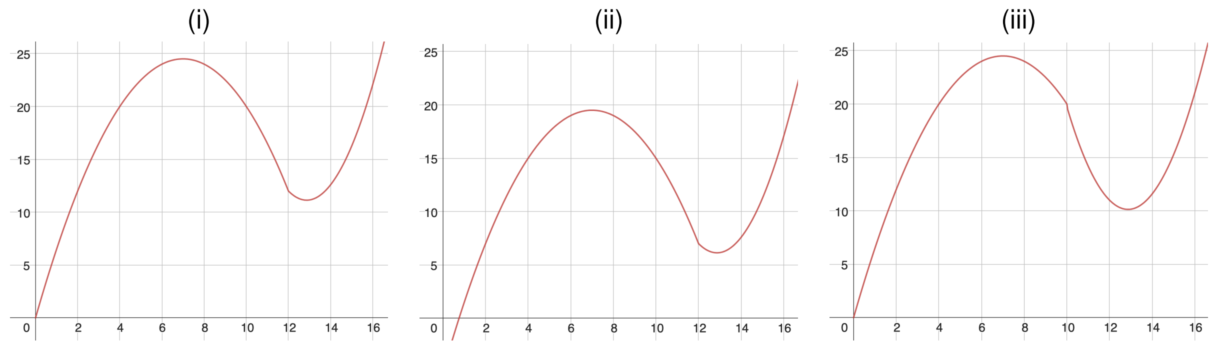
$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 + 7x & \text{si } 0 \le x \le 12 \\ \frac{-1}{108}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 34x + 220 & \text{si } 12 < x \le 20 \end{cases}$$

donde x representa el tiempo (en segundos) desde la salida.

a) ¿En qué intervalos de tiempo la velocidad aumenta y en cuáles decrece? **(1 punto)**

b) Tras el segundo 1 y antes del segundo 20, ¿la velocidad es inferior a 5 km/h en algún momento? ¿Supera los 70 km/h en algún momento? En caso afirmativo, indica cuándo. **(1 punto)**

c) Explica cuál de las siguientes figuras se corresponde con la gráfica de la función f. **(0.5 puntos)**



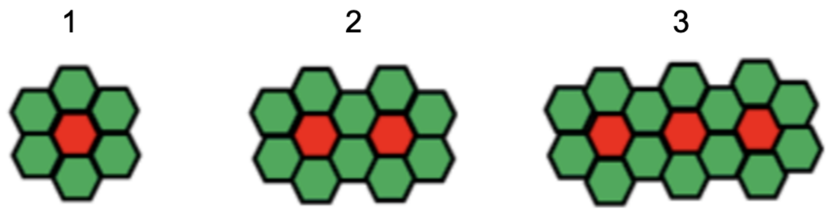

**Pregunta 1. Opción B.** Dada la función $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x$:

a) Encuentra la primitiva F de f para la que se cumple que pasa por el punto $(2, 0)$. **(0.5 puntos)**

b) Entre los puntos $x = 0$ y $x = 1$ la función f ¿toma siempre valores positivos, siempre negativos o valores tanto positivos como negativos? Si la función toma siempre valores del mismo signo entre $x = 0$ y $x = 1$, calcula el área delimitada por la función f y el eje X en ese intervalo. **(2 puntos)**

---

**Pregunta 2. Opción A.** Observa las siguientes figuras:




a) ¿Cuántos hexágonos rojos y cuántos verdes habrá en la figura número 10? Encuentra una fórmula que permita determinar el número de hexágonos de cada color a partir del número de la figura. **(2 puntos)**

b) ¿Puede existir una figura con 152 hexágonos verdes? En caso afirmativo, ¿qué número de figura sería? Si no es posible, explica por qué. **(0.5 puntos)**

**Pregunta 2. Opción B.** Un artesano teje gorros y bufandas. Cada gorro lleva 50 metros de lana de color blanco y 40 m de color negro. Cada bufanda lleva 100 m de color blanco y 100 m de color negro. Dispone de 2200 m de lana de color blanco y 2000 m de color negro y el número de gorros debe ser, a lo sumo, el doble que el de bufandas.

a) Explica cuál de las dos siguientes figuras sirve para representar el conjunto de posibles soluciones de a la pregunta ¿Cuántos gorros y bufandas puede tejer? ¿Es válido como solución al problema cualquier punto dentro de la región factible? ¿Por qué? **(1 punto)**

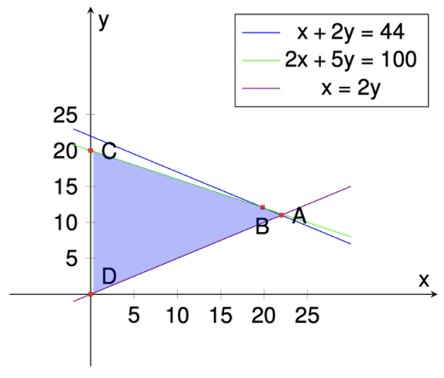



Figura 1: Región factible.

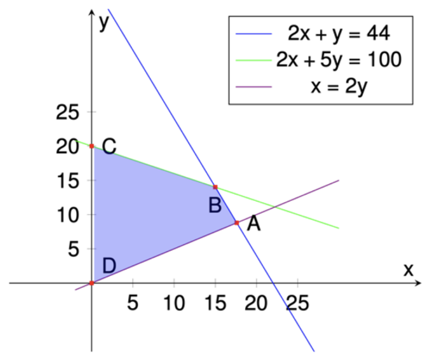



Figura 2: Región factible.

b) ¿Puede tejer 12 gorros y 8 bufandas? Si vende cada gorro a 12 euros y cada bufanda a 18 euros, ¿cuántos gorros y bufandas debe tejer para maximizar los ingresos? **(1.5 puntos)**

---

**Pregunta 3. Opción A.** Dado el sistema: $\begin{cases} (m-1)x + (m-4)y &= 6 \\ 2x - y &= 2m \end{cases}$

a) Selecciona un valor de m para el que el sistema tenga solución única y encuentra la solución en ese caso. **(1.5 puntos)**

b) Para $m = 3$, ¿pueden ser $(x, y) = (3, 0)$ y $(x, y) = (2, -2)$ soluciones de ese sistema? ¿Podría tener otras soluciones para $m = 3$? ¿Cuántas? Explica tu respuesta. **(1 punto)**

**Pregunta 3. Opción B.** Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -m & m-2 \\ 2m & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2m \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} m & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ y } E = \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}.$$

a) Si $\frac{1}{3}(A + B \cdot C) \cdot D = E$, plantea un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas (representadas por x e y) en función del parámetro m. **(1.5 puntos)**

b) Encuentra un valor de m para el cual el sistema tenga infinitas soluciones y explica por qué. **(1 punto)**

**Pregunta 4. Opción A.** Una empresa comercializa cromos de unos dibujos animados. El 60 % de los cromos son de personajes del «Reino Rosa» y el resto de los personajes del «Reino Gris». Por otro lado, uno de cada tres cromos del «Reino Rosa» y uno de cada cinco del «Reino Gris» tienen el borde dorado.

a) Elegido un cromo al azar, ¿cuál es la probabilidad de que tenga el borde dorado? **(1.25 puntos)**

b) Si se elige al azar un cromo entre los que no tienen el borde dorado, ¿cuál es la probabilidad de que sea del «Reino Rosa» ? **(1.25 puntos)**

**Pregunta 4. Opción B.** El 80 % de las personas que trabajan en un parque de atracciones son menores de 30 años. De ellas, el 60 % combinan este trabajo con estudios. De las 200 personas que trabajan en el parque, hay 120 personas que compaginan el trabajo con los estudios.

a) ¿Cuántas personas de las que trabajan en el parque tienen menos de 30 años y no estudian? **(1 punto)**

b) Si se elige una persona al azar de entre las que compaginan trabajo y estudios, ¿qué probabilidad hay de que tenga menos de 30 años? **(1 punto)**

c) ¿Es independiente, entre el personal de la empresa, estudiar y ser menor de 30 años? ¿Por qué? **(0.5 puntos)**

**Pregunta 5. Opción A.*** El peso de los yogures de cierta marca sigue distribución normal con una desviación típica de 2.7 g.

a) ¿Cuál es el tamaño muestral mínimo necesario para estimar el verdadero peso medio a partir de la media muestral con un error de estimación máximo de 0.5 g y un nivel de confianza del 95 %? **(1 punto)**

b) Para verificar si el peso medio es realmente el que indica el envase, un cliente pesa 100 yogures obteniendo para ellos un peso medio de 148.5 g. De entre los siguientes intervalos, ¿cuál es imposible que sea un intervalo de confianza construido a partir de esta muestra para el peso medio de los yogures? De los tres restantes, ¿cuál tiene un mayor nivel de confianza y cuál es, en ese caso, el nivel? **(1.5 puntos)**

(1) $(147.971, 149.029)$

(2) $(147.871, 149.129)$

(3) $(149, 371, 150, 629)$

(4) $(148.057, 148.943)$

**Pregunta 5. Opción B.*** Para estimar el porcentaje de visitantes que realiza alguna compra en la tienda de un parque de atracciones se tomaron dos muestras del mismo tamaño n. En la primera muestra se obtuvo una proporción muestral (de visitantes que compran en la tienda) de 0.7 y, a partir de ella, se construyeron dos intervalos de confianza para la proporción poblacional de visitantes que realizan alguna compra en la tienda, uno al 90 % y otro al 95 %. A partir de la segunda muestra se obtuvo un tercer intervalo al 95 % de confianza. Los tres intervalos obtenidos (no necesariamente por este orden) fueron: (0.6102 , 0.7898), (0.5565 , 0.7435) y (0.6248 , 0.7752).

a) Razona qué dos intervalos de estos tres corresponden a la primera muestra. ¿Cuál de esos dos es el correspondiente al 90 % de confianza? **(1.5 puntos)**

b) Respecto a la segunda muestra, teniendo en cuenta el intervalo obtenido, ¿cuál fue el tamaño muestral n?¿Cuál fue el número de visitantes en esa muestra que realizó alguna compra en la tienda? **(1 punto)**

* Algunos valores de la función de distribución F de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: F(1.28) = 0.90, F(1.64) = 0.95, F(1.96) = 0.975, F(2.33) = 0.99 y F(2.58) = 0.995.

Expresión del intervalo de confianza, al nivel de confianza $(1-\alpha)100\,\%$, para la media poblacional de una variable con distribución normal de varianza conocida, a partir de una muestra de tamaño n:

$$\left(\overline{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Expresión del intervalo de confianza, al nivel de confianza $(1-\alpha)100\,\%$, para la proporción poblacional, a partir de una muestra de tamaño n suficientemente grande (habitualmente se considera $n \geq 100$):

$$\left(\hat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right)$$

En ambas expresiones, $F(z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$.

## 4. MODELO DE EXAMEN RESUELTO Y CRITERIOS DE CORRECCIÓN

## MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II (Examen resuelto y criterios de corrección)

### Examen resuelto

**Pregunta 1. Opción A.**

a) Al tratarse de una función definida a trozos, estudiamos el crecimiento en cada tramo.

- En el primer tramo,

$$f'(x) = -x + 7 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > 7$$

  Por tanto, en el primer tramo, la función es creciente en el intervalo $(0, 7)$ y decreciente en $(7, 12)$ y tiene un máximo relativo en $(7, f(7)) = (7, 24.5)$.

- En el segundo tramo, $f'(x) = -\frac{1}{36}x^2 + 3x - 34$.

$$-\frac{1}{36}x^2 + 3x - 34 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -x^2 + 108x - 1224 = 0$$

  Esta ecuación tiene como soluciones

$$x = 54 + 6\sqrt{47} \approx 95.134 \qquad x = 54 - 6\sqrt{47} \approx 12.866$$

  El primer valor no está en el dominio. Estudiamos si el segundo es mínimo o máximo. La segunda derivada es $f''(x) = -\frac{1}{18}x + 3$, de modo que en el segundo punto esta derivada toma un valor positivo y, por tanto, f alcanza un mínimo relativo en $x = 54 - 6\sqrt{47} \approx 12.866$.

Por tanto, f es

- creciente en el intervalo $(0, 7)$,
- decreciente en $(7, 54 - 6\sqrt{47})$, es decir, aproximadamente en el intervalo $(7\,,\,12.866)$ y
- creciente para $x > 54 - 6\sqrt{47} \approx 12.866$.

Así, la velocidad aumenta entre los 0 y los 7 segundos, decrece entre los 7 y los 12.866 segundos aproximadamente y vuelve a crecer entre los 12.866 segundos y los 20 segundos.

b) En el segundo 1 la velocidad es $f(1) = -\frac{1}{2}1^2 + 7 \cdot 1 = 6.5$ km/h. A partir de ahí la velocidad crece hasta el segundo 7 y luego decrece hasta el segundo 12. En este instante la velocidad es $f(12) = -\frac{1}{2}12^2 + 7 \cdot 12 = -72 + 84 = 12$ km/h. De modo que en el primer tramo de definición la velocidad no baja a 5 km/h en ningún instante después del segundo 1.
En el segundo tramo la velocidad comienza en $f(12) = -\frac{1}{108} \cdot 12^3 + \frac{3}{2}12^2 - 34 \cdot 12 + 220 = 12$ km/h. El mínimo se alcanza en el punto $x = 54 - 6\sqrt{47} \approx 12.866$, es decir, a los 12.866 segundos, donde la función vale $f(12.866) \approx 11.137$ km/h y después, según hemos visto en el apartado anterior, la velocidad crece.
Por tanto, en ningún instante después del segundo 1 la velocidad se reduce hasta los 5 km/h.

Respecto a si supera los 70 km/h en algún momento, en el primer tramo, la función tiene máximo en $(7, 24.5)$, por lo que no supera los 70 km/h. En el segundo tramo, la función es creciente desde $x = 12.866$ hasta $x = 20$. Si evaluamos f en $x = 20$:

$$f(20) = \frac{-1}{108}20^3 + \frac{3}{2}20^2 - 34 \cdot 20 + 220 \approx 65.9259\,,$$

por lo que podemos afirmar que la montaña rusa no superará los 70 km/h en los 20 primeros segundos.

c) A partir del estudio realizado en los dos apartados anteriores, sabemos que f tiene un máximo en $x = 7$ y un mínimo en $x = 12.866$, aspecto que se verifica en las tres funciones. Sabemos, además que $f(7) = 24.5$, lo que nos hace descartar la figura (ii). Podemos fijarnos también en el valor $f(12.866)$ para descartar la gráfica (iii). Alternativamente, la gráfica (iii) también se puede descartar porque el punto en el que cambia la curva es $x = 10$, que no se corresponde con la expresión de la función. Por lo tanto, la gráfica adecuada tiene que ser la (i).

**Pregunta 1. Opción B.**

a) Puesto que $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x$, entonces $F(x) = \int f(x)dx = \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + C$. Por otro lado, como se indica que $F(2) = 0$, se tiene que $F(2) = 2^4/4 - 2^4/3 - 12/2 + C = -22/3 + C$, con lo que $C = 22/3$ y, por tanto, la primitiva buscada es $F(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 22/3$.

b) La función f corta al eje de ordenadas en el punto $(0, f(0))$, es decir, en $(0, 0)$. Además, como $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x = x(x + 1)(x - 3) = 0$ se da si y solo si $x = 0$ o $x = -1$ o $x = 3$, entonces f también corta el eje de abscisas en los puntos $(–1, 0)$ y $(3, 0)$.

Una posible respuesta al signo de la función entre 0 y 1 pasa por, razonadamente, argumentar que si la función se anula en 0 y no vuelve a anularse hasta 3, como es una función continua (porque es polinómica) entonces tiene el mismo signo en el intervalo $(0, 3)$. Evaluando, por ejemplo, en $x = 1$, se obtiene que $f(1) = 1–2–3 = –4 < 0$. En consecuencia, la función es siempre negativa en el intervalo $(0, 1)$. Alternativamente, también es posible plantear un estudio más meticuloso que pase por estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función. Para ello, vamos a comenzar calculando los puntos críticos. Para ello:

$$f'(x) = 3x^2 - 4x - 3 = 0 \leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{13}}{3}\,.$$

Puesto que $f''(x) = 6x - 4$, se tiene que $f''(\frac{2-\sqrt{13}}{3}) < 0$, de modo que $x = \frac{2-\sqrt{13}}{3} \approx -0.5352$ es un máximo relativo y $f(\frac{2-\sqrt{13}}{3}) \approx 0.8794$. En cuanto al otro punto donde se anula la derivada primera, $f''(\frac{2+\sqrt{13}}{3}) > 0$, por lo que $x = \frac{2+\sqrt{13}}{3} \approx 1.869$ es un mínimo relativo y $f(\frac{2+\sqrt{13}}{3}) \approx -6.065$. Estudiando en detalle la segunda derivada, $f''(x) = 0$ para $x = 2/3$ y $f(2/3) \approx -2.5926$. Además, $f''(x) < 0$ para $x < 2/3$, de modo que la función es cóncava hacia abajo ($\cap$) para $x \in (-\infty, 2/3)$ y $f''(x) > 0$ para $x > 2/3$, de modo que la función es cóncava hacia arriba ($\cup$) para $x \in (2/3, \infty)$. De todo lo anterior se deduce que entre 0 y 1 la función es siempre negativa.

El área limitada por la curva f y el eje X entre $x = 0$ y $x = 1$, teniendo en cuenta la expresión obtenida para F en el apartado anterior, es igual a:

$$-\int_0^1 f(x)dx = F(0) - F(1) = \frac{22}{3} - \frac{65}{12} = \frac{23}{12} \approx 6.4167\,.$$

**Pregunta 2. Opción A.**

a) Es posible determinar el número de hexágonos de cada color en la figura número 10 incluso sin llegar a razonar la fórmula general. Se pueden contar los hexágonos rojos y verdes, y advertir la regularidad geométricamente o a través de una tabla (incremento de cuatro hexágonos verdes en cada figura): Así, en la figura número 17 habrá 68 puntos en total.

También podríamos haber comenzado por identificar el número de puntos de cada color y, posteriormente, sumarlos. Así, por ejemplo, contando los puntos vemos que:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| n.º. hexágonos rojos = n.º figura | 1 | 2 | 3 | 4 | ... | 10 |
| n.º. hexágonos verdes | 6 | 10 | 14 | 18 | ... | 42 |
| incremento de n.º. hexágonos verdes | – | +4 | +4 | +4 | ... | – |

Como se observa, alrededor de cada hexágono rojo hay 6 hexágonos verdes. Si se multiplica por 6 el número de hexágonos rojos, estaríamos contando dos veces los 2 hexágonos verdes que son adyacentes, al mismo tiempo, a dos hexágonos rojos. Estos 2 hexágonos verdes aparecen entre cada dos rojos, por lo que una forma posible de contar que nos lleva a la siguiente fórmula general (que puede ser expresada literal o algebraicamente) sería:

n.º hexágonos verdes = 6 (n.º hexágonos rojos) – 2 (n.º hexágonos rojos – 1) = 4 (n.º hexágonos rojos) + 2

No obstante, existen múltiples formas de llegar tanto al número de hexágonos verdes en la figura 10 como a una expresión general que relacione el número de hexágonos de cada color.

b) Si hubiera una figura con 152 hexágonos verdes, debería responder a la fórmula general, es decir, debería existir una n tal que:

$$152 = 4n + 2$$

Es decir, n sería $150/4 = 37.5$. Obviamente, esta solución no es posible porque n tiene que ser un número entero, por lo que no existiría tal figura.

**Pregunta 2. Opción B.**

a) Si representamos por x e y el número de gorros y bufandas, respectivamente, las condiciones impuestas llevan a formar el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\begin{aligned} 50x + 100y &\leq 2200 \\ 40x + 100y &\leq 2000 \\ x &\leq 2y \\ x, y &\geq 0 \end{aligned}$$

Equivalentemente:

$$\begin{aligned} x + 2y &\leq 44 \\ 2x + 5y &\leq 100 \\ x &\leq 2y \\ x, y &\geq 0 \end{aligned}$$

Los puntos que cumplen todas estas restricciones son todos los pares de números enteros dentro del recinto sombreado de la figura de la izquierda. Por tanto, la figura correcta es la 1, la de la izquierda. Dado que los puntos formados por componentes enteras que se encuentran dentro de la región sombreada (región factible) son los que cumplen las cuatro inecuaciones, cualquiera de ellos es válido como solución del problema.

b) Sí se podrían hacer 12 gorros y 8 bufandas puesto que el punto $(12, 8)$ pertenece a la región factible. Dicho de otro modo, satisface todas las inecuaciones planteadas. Por otro lado, la función de ingresos es $z(x, y) = 12x+18y$. Así, como queremos maximizar la función objetivo z sujeta a las restricciones anteriores, los máximos se encontrarán necesariamente en uno de los valores extremos de la región factible, que, en este caso, son:

$$\begin{aligned} z(A) &= 12 \cdot 22 + 18 \cdot 11 = 462 \text{ euros} \\ z(B) &= 12 \cdot 20 + 18 \cdot 12 = 456 \text{ euros} \\ z(C) &= 12 \cdot 0 + 18 \cdot 20 = 360 \text{ euros} \\ z(D) &= 12 \cdot 0 + 18 \cdot 0 = 0 \text{ euros} \end{aligned}$$

por lo que los ingresos máximos se alcanzan si se hacen 22 gorros y 11 bufandas. En ese caso, los ingresos son 462 euros.

**Pregunta 3. Opción A.**

a) Para seleccionar el valor m que cumple las condiciones pedidas necesitamos, en este caso, identificar cuándo el sistema es compatible y determinado. Para ello se puede aplicar, por ejemplo, el método de Gauss (u otro alternativo, como la regla de Cramer). Aplicando Gauss:

$$\left(\begin{array}{cc|c} m-1 & m-4 & 6 \\ 2 & -1 & 2m \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 2m \\ m-1 & m-4 & 6 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 2m \\ 0 & 3m-9 & -2m^2+2m+12 \end{array}\right)$$

Como $3m–9 = 0$ se cumple si y solo si $m = 3$, se tiene que:

- Si $m = 3$, la última fila es $(0\ 0|0)$ con lo que el sistema es compatible indeterminado.
- En otro caso, si $m \neq 3$, el sistema es compatible y determinado.

Así pues, cualquier valor de $m \neq 3$ garantiza que el sistema tiene una solución única. Si tomamos, por ejemplo, $m = 0$ se obtiene:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ 0 & -9 & 12 \end{array}\right)$$

El sistema queda como:

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ -9y = 12 \end{cases}$$

Resolviéndolo:

$$\begin{cases} y = \frac{-4}{3} \\ x = \frac{y}{2} = \frac{-2}{3} \end{cases}$$

De modo que, para m = 0, la solución es:

$$x = \frac{-2}{3}, y = \frac{-4}{3}.$$

b) Para m = 3, como el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones. Con m = 3, se tiene que:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Por lo que el sistema se convierte en la ecuación 2x–y = 6. El punto (3, 0) la verifica y también lo hace el punto (2, –2). Así que ambos son soluciones del sistema para m = 3. Como el sistema es compatible indeterminado, sí tiene más soluciones para m = 3, de hecho, tiene infinitas soluciones.

**Pregunta 3. Opción B.**

a) Puesto que:

$$B \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m+1 & 2 \\ -m & 2 \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$A + B \cdot C = \begin{pmatrix} -m & m-2 \\ 2m & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m+1 & 2 \\ -m & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & m \\ m & 4 \end{pmatrix}$$

Con lo que:

$$\frac{1}{3}(A + B \cdot C) \cdot D = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} x + my \\ mx + 4y \end{pmatrix}$$

La expresión $\frac{1}{3}(A + B \cdot C)D = E$ equivale a $(A + B \cdot C)D = 3E$, de modo que el sistema se puede escribir como:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x + my & = & 3 \\ mx + 4y & = & 3m \end{array}\right.$$

b) b) Para encontrar un valor de m que haga que el sistema tenga infinitas soluciones, debemos encontrar un valor m que lo haga compatible indeterminado. Usando, por ejemplo, por Gauss:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & m & 3 \\ m & 4 & 3m \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & m & 3 \\ 0 & 4-m^2 & 0 \end{array}\right)$$

Como $4 - m^2 = 0$ si y solo si $m = \pm 2$, se tiene que si $m = \pm 2$, la última fila es (0 0|0) con lo que el sistema es compatible indeterminado. Por lo tanto, cualquiera de los valores m = 2 y m = –2 hacen que el sistema tenga infinitas soluciones.

**Pregunta 4. Opción A.** Si denotamos por R el suceso cromo del «Reino Rosa» y por D el suceso «cromo dorado», podemos representar la información del enunciado en términos de probabilidades de la siguiente forma:

$$P(R) = 0.6$$

$$P(D/R) = 1/3$$

$$(D/\overline{R}) = 0.2$$

Por lo tanto, podemos determinar las probabilidades pedidas de la siguiente forma:

a) $P(D) = P(R) \cdot P(D/R) + P(\overline{R}) \cdot P(D/\overline{R}) = 0.6 \cdot \frac{1}{3} + 0.4 \cdot 0.2 = 0.28$

b) $P(R/\overline{D}) = \frac{P(R \cap \overline{D})}{P(\overline{D})} = \frac{P(R) \cdot P(\overline{D}/R)}{P(\overline{D})} = \frac{0.6 \cdot \frac{2}{3}}{0.72} = 0.556$

Donde $P(\overline{D})$ se obtiene a partir de P(D), que se obtuvo en el apartado anterior: $P(\overline{D}) = 1 - P(D) = 1 - 0.28 = 0.72$.

También es válido representar la información del ejercicio, por ejemplo, construyendo una tabla de contingencia (o un diagrama de árbol). Así, mediante una tabla, podemos establecer una representación proporcional de la situación:

| | R | $\overline{R}$ | |
|---|---|---|---|
| D | 20 | 8 | 28 |
| $\overline{D}$ | 40 | 32 | 72 |
| | 60 | 40 | 100 |

**Pregunta 4. Opción B.** Denotaremos E el suceso «persona empleada que estudia» y por M el suceso «persona empleada menor de 30 años». Entonces, si se elige un empleado al azar, la información del enunciado se puede traducir como:

$$P(M) = 0.8 \quad P(E/M) = 0.6 \quad P(E) = \frac{120}{200} = 0.6$$

a) Aplicando la definición de probabilidad condicionada y la probabilidad del suceso contrario llegamos a que:

$$P(M \cap \overline{E}) = P(\overline{E}/M) \cdot P(M) = (1 - P(E/M))P(M) = (1 - 0.6)0.8 = 0.32.$$

Puesto que hay 200 personas empleadas, el 32 % se corresponde con 64 personas que tienen menos de 30 años y no estudian.

b) La probabilidad pedida se corresponde con P(M/E). Podemos aplicar el teorema de Bayes o la definición de probabilidad condicionada para deducir que:

$$P(M/E) = \frac{P(E/M) \cdot P(M)}{P(E)} = \frac{0.6 \cdot 0.8}{0.6} = 0.8.$$

c) Se trata de comprobar la independencia entre los sucesos E y M. Si fueran independientes, debería cumplirse que:

$$P(E/M) = P(E)$$

y en este caso podemos comprobar que:

$$P(E/M) = 0.6 = P(E)$$

por lo que serían independientes. Alternativamente, podríamos comprobar que

$$P(E \cap M) = P(E) \cdot P(M)$$

y se comprueba que:

$$P(E \cap M) = P(E/M) \cdot P(M) = 0.6 \cdot 0.8 = 0.48 = 0.6 \cdot 0.8 = P(E) \cdot P(M).$$

Si se hace el ejercicio construyendo una tabla, la asociada a estos datos sería proporcional a:

| | $M$ | $\overline{M}$ | |
|---|---|---|---|
| $E$ | 96 | 24 | 120 |
| $\overline{E}$ | 64 | 16 | 80 |
| | 160 | 40 | 200 |

**Pregunta 5. Opción A.** Si denotamos por X la v.a. «peso (en gramos) de un yogur», sabemos que dicha variable sigue una distribución normal de media desconocida $\mu$ y desviación típica $\sigma = 2.7$ g, es decir, $X \to N(\mu, 2.7)$.

a) Una vez fijados el error máximo de estimación $\epsilon$ y el nivel de confianza $(1-\alpha)\cdot 100\,\%$, si se considera que la variable en estudio sigue una distribución normal con desviación típica conocida, el mínimo tamaño que ha de tener la muestra para verificar estas condiciones es:

$$n \geq \left(z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\epsilon}\right)^2$$

Así, puesto que la mitad de la amplitud del intervalo debe ser, como mucho 0.5 g, se tiene que $\epsilon \leq 0.5$ y, por otro lado, como $1-\alpha = 0.95$ se tiene que $z_{\alpha/2} = 1.96$. De todo lo anterior se deduce que:

$$n \geq \left(1.96\frac{2.7}{0.5}\right)^2 = 112.02$$

con lo que el tamaño mínimo muestral para cumplir las condiciones será de 113 yogures.

b) Ahora, para la v.a. X tenemos una muestra aleatoria de tamaño $n = 100$ con media muestral $\bar{x} = 148.5$ g. Por lo tanto, cualquier intervalo de confianza (con independencia del nivel de confianza) para $\mu$ a partir de esta muestra debe estar centrado en el valor $\bar{x} = 148.5$. Así, podemos descartar fácilmente el intervalo (3), que es imposible que se haya construido a partir de esta muestra.

Además, sin necesidad de operaciones adicionales, el de mayor nivel de confianza de los tres intervalos restantes será aquel que tenga una mayor amplitud, es decir, el (2), con amplitud 1.258. En ese caso, a partir de la expresión del intervalo al nivel de confianza $(1-\alpha)\cdot 100\,\%$, para la media poblacional de una variable aleatoria con distribución normal y desviación típica conocida es:

$$\left(\overline{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

tenemos que la amplitud es:

$$2 \cdot z_{\alpha/2}\frac{2.7}{\sqrt{100}} = 1.258$$

de donde se deduce que $z_{\alpha/2} = 2.3296 \approx 2.33$, por lo que el nivel de confianza para este intervalo es del 98 % ya que $F(2.33) = 0.99$.

**Pregunta 5. Opción B.**

El intervalo de confianza, al nivel de confianza $(1-\alpha)\cdot 100\,\%$, para una proporción poblacional en muestras grandes es:

$$\left(\hat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right)$$

donde $\hat{p}$ representa la proporción muestral, n el tamaño de muestra y $z_{\alpha/2}$ el valor que cumple $P(|Z| < z_{\alpha/2}) = 1-\alpha$ para una variable Z con distribución $N(0,1)$.

a) Los dos intervalos que correspondan a la misma muestra deben tener el mismo punto medio, que es la proporción muestral. Para los tres intervalos dados, los puntos medios y los errores de estimación son:

$$\begin{array}{lll} (0.6102\,,\ 0.7898) & \to \hat{p} = 0.7 & e = 0.0898 \\ (0.5565\,,\ 0.7435) & \to \hat{p} = 0.65 & e = 0.0935 \\ (0.6248\,,\ 0.7752) & \to \hat{p} = 0.7 & e = 0.0752 \end{array}$$

Por tanto los que corresponden a la misma muestra deben ser el primero y el tercero.

Por otra parte, si uno es al 90 % de confianza y otro al 95 % de confianza, el correspondiente al 90 % de confianza debe ser menos amplio (menor confianza permite mayor precisión en la estimación, es decir, menor error). Por tanto, el intervalo correspondiente al 90 % de confianza es el tercero: (0.6248 , 0.7752).

b) El intervalo obtenido a partir de la segunda muestra debe ser el segundo, (0.5565 , 0.7435), que es el que se obtiene a partir de una proporción muestral diferente, $\hat{p} = 0.65$, como ya se razonó arriba.
Para obtener el tamaño muestral,

$$e = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \qquad \longrightarrow \qquad n = \left(\frac{z_{\alpha/2}}{e}\right)^2 \hat{p}(1-\hat{p})$$

Si el nivel de confianza es el 95 %, se tiene que $z_{\alpha/2} = 1.96$. Además, $e = 0.0935$ y $\hat{p} = 0.65$. Entonces, $n = \left(\frac{z_{\alpha/2}}{e}\right)^2 \hat{p}(1-\hat{p}) = \left(\frac{1.96}{0.0935}\right)^2 0.65(1-0.65) \approx 99.97$. De modo que el tamaño muestral fue $n = 100$.

Por consiguiente, el número de personas en esa muestra que realizó compras fue de:

$$n\hat{p} = 100 \cdot 0.65 = 65 \text{ personas.}$$

## Criterios de corrección

**Pregunta 1. Opción A.**

a) Responder justificada y correctamente a la pregunta: **1 punto**.

b) Responder justificada y correctamente a la primera pregunta: **0.5 puntos**.

Responder justificada y correctamente a la segunda pregunta: **0.5 puntos**.

c) Explicar qué figura se corresponde con la función: **0.5 puntos**.

**Pregunta 1. Opción B.**

a) Calcular correctamente la integral: **0.5 puntos**.

b) Responder correcta y justificadamente la primera pregunta: **1 punto**.

Calcular el área en ese intervalo: **1 punto**.

**Pregunta 2. Opción A.**

a) Determinar los números de hexágonos rojos y verdes en la figura 10: **1 punto**.

Encontrar la fórmula general y explicar cómo se ha obtenido: **1 punto**.

b) Argumentar correctamente sobre la pregunta planteada: **0.5 puntos**.

**Pregunta 2. Opción B.**

a) Razonar justificadamente qué representación es correcta: **0.5 puntos**.

Responder justificadamente a las cuestiones: **0.5 puntos**.

b) Responder correcta y justificadamente a la primera pregunta: **0.5 puntos**.

Responder correcta y justificadamentea la segunda pregunta: **1 punto**.

**Pregunta 3. Opción A.**

a) Determinar un valor de m válido: **1 punto**.

Determinar la solución en ese caso: **0.5 puntos**. .

b) Responder correcta y justificadamente a la primera pregunta: **0.5 puntos**.

Responder correcta y justificadamente al resto de preguntas y explicar la respuesta: **0.5 puntos**.

**Pregunta 3. Opción B.**

a) Realizar correctamente las operaciones con las matrices: **0.75 puntos**.

Plantear correctamente el sistema: **0.75 puntos**.

b) Encontrar el valor de m y justificar la respuesta: **1 punto**.

**Pregunta 4. Opción A.**

a) Responder justificada y correctamente a la pregunta: **1.25 puntos**.

b) Responder justificada y correctamente a la pregunta: **1.25 puntos**.

**Pregunta 4. Opción B.**

a) Responder correcta y justificadamente a la pregunta: **1 punto**.

b) Calcular la probabilidad solicitada: **1 punto**.

c) Responder correcta y justificadamente a la pregunta: **0.5 puntos**.

**Pregunta 5. Opción A.**

a) Calcular el tamaño muestral correctamente: **1 punto**.

b) Responder correctamente a la primera pregunta: **0.5 puntos**.

Responder correctamente a la segunda pregunta: **1 punto**.

**Pregunta 5. Opción B.**

a) Determinar el intervalo que no se corresponde con la primera muestra: **0.5 puntos**.

Identificar justificadamente el que tiene nivel de confianza 90 %: **1 punto**.

b) Determinar el tamaño muestral: **0.5 puntos**.

Determinar el número de visitantes: **0.5 puntos**.