RESOLUCIÓN DEL EXAMEN PAU JUNIO 2026
Matemáticas II

Por la propia naturaleza de la disciplina, una misma pregunta puede admitir diferentes soluciones correctas. Por supuesto, cualquier solución de cualquiera de las preguntas del examen que sea correcta y esté bien argumentada deberá ser considerada como válida en el proceso de corrección, aunque no esté incluida en este documento.

El examen consta de un total de cinco preguntas. Las tres primeras preguntas sin opciones. Las dos últimas preguntas con dos opciones cada una, para hacer solo una de esas opciones. La elección de la primera o la segunda opción puede cambiar de una pregunta a otra. Si se responden las 2 opciones de una pregunta, solo se corregirá la primera opción contestada. Las preguntas se pueden hacer en cualquier orden. La puntuación máxima de cada pregunta es de 2 puntos. Las cinco preguntas son:

Pregunta 1: Sentido numérico y algebraico (2 puntos).

Pregunta 2: Sentido de la medida (2 puntos).

Pregunta 3: Sentido espacial (2 puntos).

Pregunta 4 (opciones 4.1 y 4.2): Sentido de la medida (2 puntos).

Pregunta 5 (opciones 5.1 y 5.2): Sentido estocástico (2 puntos).

Solo se pueden usar las tablas estadísticas que se proporcionan con el examen y, según la normativa vigente, no se puden usar calculadoras gráficas ni programables.

En Murcia, a 10 de junio de 2026.

Pedro Nicolás Zaragoza
Coordinador Matemáticas II
Departamento de Didáctica de las CC. Matemáticas y Sociales
Universidad de Murcia

Pregunta 1: Sentido numérico y algebraico (2 puntos)

Darío y Cayetana están organizando un pequeño negocio y deciden invertir dinero en tres cosas: x miles de euros en publicidad, y miles de euros en materiales, z miles de euros en logística. El reparto depende de un parámetro positivo, k, que representa una estrategia de ajuste económico según la situación del mercado. Se sabe que la suma de todo lo invertido es en total 12 mil euros. Darío propone que la inversión en publicidad más el doble de la inversión en materiales sea igual a la inversión en logística más k. Cayetana quiere que el doble de la inversión en publicidad menos la inversión en materiales más la inversión en logística sea igual a 4 mil euros.

a) **(0,75 ptos.)** Plantee un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas que refleje los datos del problema.

b) **(1,25 ptos.)** Discuta el correspondiente sistema. En caso de existir solución única, encuéntrela y exprésela en función de k si es necesario.

Solución:
a) El sistema de ecuaciones es

$$\begin{cases} x+y+z=12 \\ x+2y-z=k \\ 2x-y+z=4 \end{cases}$$

b) El determinante de la matriz de coeficientes es

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -7.$$

Como es no nulo, el rango de la matriz de coeficientes es 3, así es que, por el teorema de Rouché-Frobenius, el sistema es compatible determinado, es decir, tiene una única solución. Podemos calcularla siguiendo la regla de Cramer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 12 & 1 & 1 \\ k & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{-7} = \frac{2k}{7}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 12 & 1 \\ 1 & k & -1 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}}{-7} = \frac{k+28}{7}, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 12 \\ 1 & 2 & k \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix}}{-7} = \frac{56-3k}{7}.$$

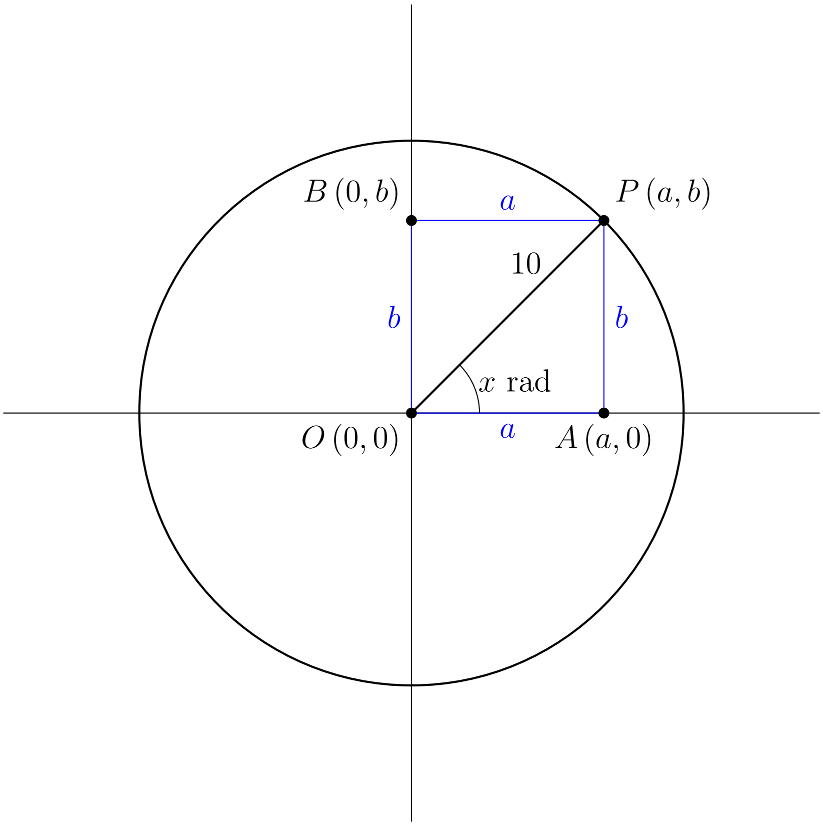
Pregunta 2: sentido de la medida (2 puntos)

Considere un punto P de coordenadas (a,b) que está en el primer cuadrante, sobre una circunferencia de radio 10 centrada en el origen $O(0,0)$. Sea x el ángulo que forma el radio OP con el eje horizontal (o eje X), medido en radianes.

a) **(0,75 ptos.)** Demuestre que el área del rectángulo de vértices $O(0,0), A(a,0), B(0,b)$ y $P(a,b)$ viene dada por la función $f(x) = 100 \cdot \operatorname{sen}(x) \cdot \cos(x)$.

b) **(1,25 ptos.)** Calcule el ángulo x (en radianes) para que el área de dicho rectángulo sea máxima.

Solución: a) La situación es la siguiente:



Usando que $\operatorname{sen}(x) = \frac{b}{10}$ y $\cos(x) = \frac{a}{10}$ tenemos que el área del rectángulo es

$$a \cdot b = 10 \cdot \cos(x) \cdot 10 \cdot \operatorname{sen}(x) = 100 \cdot \operatorname{sen}(x) \cdot \cos(x) = f(x).$$

b) Tenemos que

$$f'(x) = 100\cos^2(x) - 100\operatorname{sen}^2(x) = 100(2\cos^2(x) - 1),$$

que se anula si, y solo si, $\cos^2(x) = \frac{1}{2}$. Como P está en el primer cuadrante, $\cos(x)$ es no negativo, de modo que $\cos^2(x) = \frac{1}{2}$ implica $\cos(x) = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ que, a su vez, es equivalente a que $x = \frac{\pi}{4}$. En el intervalo $(0, \frac{\pi}{4})$ tenemos que $f'(x) > 0$ (tómese, por ejemplo, $f'(\frac{\pi}{6})$), y en el intervalo $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ tenemos que $f'(x) < 0$ (tómese, por ejemplo, $f'(\frac{\pi}{3})$). Así es que en el intervalo $(0, \frac{\pi}{4})$ la función $f(x)$ es creciente y en el intervalo $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ la función es decreciente, siendo entonces $x = \frac{\pi}{4}$ el valor que maximiza el área del rectángulo.

Pregunta 3: sentido espacial (2 puntos)

Considere el plano $\pi : 2x - y + 3z - 5 = 0$ y la recta

$$r : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{-1}.$$

a) **(0,75 ptos.)** Estudie la posición relativa de r y π.

b) **(1,25 ptos.)** Si r corta a π en un solo punto, calcule dicho punto y el ángulo que forma r con π. Si r es paralela a π, calcule la distancia de r a π.

Solución: a) Un vector normal al plano es $\vec{n} = (2, -1, 3)$, y un vector director de la recta es $\vec{v}_r = (2, 1, -1)$, y se tiene que el correspondiente producto escalar es

$$\vec{n} \cdot \vec{v}_r = (2, -1, 3) \cdot (2, 1, -1) = 2 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 + 3 \cdot (-1) = 4 - 1 - 3 = 0.$$

Entonces r es paralela a π, de modo que o bien r está contenida en π, o bien r no tiene en común ningún punto con π. Pero el punto $P(1, -1, 2)$ de r no está en π, porque no satisface la ecuación del plano

$$2 \cdot 1 - (-1) + 3 \cdot 2 - 5 = 4 \neq 0.$$

Entonces r es paralela a π, sin ningún punto en común con π.
b) Se puede usar la fórmula de la distancia de una recta a un plano:

$$d(r, \pi) = d(P, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}} = \frac{|2 \cdot 1 - (-1) + 3 \cdot 2 - 5|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2}} = \frac{4}{\sqrt{14}}.$$

Alternativamente, también se puede calcular el punto, Q, de intersección con π de la recta que pasa por P y tiene vector director $\vec{n}$, y luego calcular la distancia $d(P, Q)$.

Pregunta 4: sentido de la medida (a elegir entre 4.1 y 4.2, de 2 puntos cada una)

Opción 4.1 (2 ptos.): Justifique que la derivada de la función $f(x) = e^x(x-1) + 1 - x$ se anula en algún punto del intervalo $(0, 1)$.
Solución: La función es continua en $[0, 1]$, derivable en $(0, 1)$ y cumple que $f(0) = f(1)$:

$$f(0) = e^0(0-1) + 1 - 0 = 0 = e(1-1) + 1 - 1 = f(1).$$

Entonces, por el teorema de Rolle o de Lagrange, sabemos que existe un punto en el intervalo $(0, 1)$ en el que $f'(x)$ se anula.

Opción 4.2 (2 ptos.):

a) **(1,5 ptos.)** Calcule la integral indefinida $\displaystyle\int \frac{1}{x(\ln x)^2} dx$.

b) **(0,5 ptos.)** Determine la primitiva de la función $f(x) = \dfrac{1}{x(\ln x)^2}$ cuya gráfica pasa por el punto de coordenadas $(e, 1)$.

Solución:
a) Haciendo el cambio de variable $t = \ln x,\ dt = \frac{dx}{x}$, tenemos que

$$\int \frac{1}{x(\ln x)^2} dx = \int \frac{1}{t^2} dt = -t^{-1} + C = \frac{-1}{\ln x} + C$$

b) Si queremos que $F(x) = \frac{-1}{\ln x} + C$ pase por el punto $(e, 1)$ es necesario que $1 = F(e) = \frac{-1}{1} + C$, de modo que $C = 2$. La primitiva pedida es, por tanto, $F(x) = \frac{-1}{\ln x} + 2$.

Pregunta 5: sentido estocástico (a elegir entre 5.1 y 5.2, de 2 puntos cada una)

Opción 5.1 (2 ptos.):

En una fábrica hay tres máquinas, A, B y C, que producen el mismo tipo de pieza. La máquina A fabrica el 50 % de las piezas, y el 3 % de ellas son defectuosas. La máquina B fabrica el 30 % de las piezas, y el 4 % de ellas son defectuosas. La máquina C fabrica el 20 % de las piezas, y el 5 % de ellas son defectuosas. Se elige una pieza al azar de la producción total.

a) **(0,75 ptos.)** Calcule la probabilidad de que la pieza sea defectuosa.

b) **(0,75 ptos.)** Sabiendo que la pieza elegida es defectuosa, calcule la probabilidad de que haya sido fabricada por la máquina B.

c) **(0,5 ptos.)** Calcule la probabilidad de que la pieza no sea defectuosa sabiendo que procede de la máquina C.

Solución: Llamamos A (respectivamente, B, C) al evento consistente en que la pieza haya sido producida por la máquina A (respectivamente, B, C). Llamamos D al evento consistente en que la pieza sea defectuosa. El enunciado nos dice que:

- $P(A) = 0,5$ y $P(D|A) = 0,03$, de modo que $P(D|A)P(A) = \frac{15}{1000}$
- $P(B) = 0,3$ y $P(D|B) = 0,04$, de modo que $P(D|B)P(B) = \frac{12}{1000}$
- $P(C) = 0,2$ y $P(D|C) = 0,05$ de modo que $P(D|C)P(C) = \frac{10}{1000}$

a) Por el teorema de la probabilidad total,

$$P(D) = P(D|A)P(A) + P(D|B)P(B) + P(D|C)P(C) = \frac{15+12+10}{1000} = \frac{37}{1000} = 0,037.$$

b) Utilizando la fórmula de Bayes

$$P(B|D) = \frac{P(D|B) \cdot P(B)}{P(D)} = \frac{12/1000}{37/1000} = \frac{12}{37} \approx 0,324.$$

c) Usando que $P(C) = P(C \cap D) + P(C \cap \overline{D})$, tenemos que

$$P(\overline{D}|C) = \frac{P(C \cap \overline{D})}{P(C)} = \frac{P(C) - P(C \cap D)}{P(C)} = \frac{\frac{2}{10} - \frac{10}{1000}}{\frac{2}{10}} = \frac{\frac{190}{1000}}{\frac{200}{1000}} = \frac{19}{20} = 0,95.$$

También se puede usar directamente que $P(D|C) + P(\overline{D}|C) = 1$, de modo que

$$P(\overline{D}|C) = 1 - P(D|C) = 1 - 0,05 = 0,95.$$

Opción 5.2 (2 ptos.): Una fábrica produce bombillas y se sabe que el 5 % son defectuosas.

a) **(0,75 ptos.)** Calcule la probabilidad de que en 9 bombillas escogidas al azar haya exactamente 3 bombillas defectuosas.

b) **(1,25 ptos.)** Calcule la probabilidad de que en 200 bombillas escogidas al azar haya al menos 10 bombillas defectuosas.

Solución:
a) Se trata de una variable aleatoria, X, que sigue una distribución de probabilidad binomial con $p = 0,05$ y $n = 9$. Usando la tabla, se ve que

$$P(X = 3) = 0,0077.$$

También se puede hacer directamente con la fórmula:

$$P(X = 3) = \binom{9}{3} 0,05^3 \cdot 0,95^6 = 0,0077.$$

b) Ahora se trata de una variable aleatoria, X, que sigue una distribución de probabilidad binomial con $p = 0,05$ y $n = 200$. Como $n = 200$, $np = 10$ y $n(1-p) = 190$ son suficientemente grandes, para calcular $P(X \geq 10)$ podemos aproximar X mediante una variable aleatoria Y que siga una distribución de probabilidad normal con $\mu = np = 200 \cdot 0,05 = 10$ y $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{9,5} = 3,082$. Llamando Z a una variable aleatoria que siga una distribución de probabilidad normal $N(0,1)$, y usando el criterio de corrección de Yates, tenemos que:

$$P(X \geq 10) = P(Y \geq 9,5) = P\left(Z \geq \frac{9,5 - 10}{3,082}\right) = P(Z \geq -0,16) = P(Z \leq 0,16) = 0,5636.$$