

Mates Reserva 2023 (Guinea)

Parte TEST

1. Una matriz contiene un total de 65 coeficientes. Entonces:

- a) Su dimensión es 6×5 .
- b) Su número de columnas puede ser 13.
- c) Ninguna de las anteriores.

2. Para toda A matriz real de dimensión 3×1 y B matriz real de dimensión 1×3 , se cumple que:

- a) $\text{rango}(A.B) \geq 2$.
- b) $\text{rango}(A.B) \leq 1$.
- c) Ninguna de las anteriores.

3. Toda A matriz real cuadrada ortogonal (es decir, multiplicada por su traspuesta da la identidad) cumple que:

- a) $A^T = A$, donde A^T es la traspuesta.
- b) A^k es ortogonal, para cualquier $k \in \mathbb{N}$.
- c) Ninguna de las anteriores

4. El sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 5x - y + z = 0 \\ 4x - 3y + 7z = 0 \end{cases}$$

- a) Tiene solución única $x=4, y=31, z=11$.
- b) Tienen infinitas soluciones.
- c) Ninguna de las anteriores

5. En el espacio tridimensional se consideran el plano $\pi: 3x - 2y - z = 2$ y la recta

$$r: \begin{cases} 2x + 2y + 2z = 1 \\ x + 3y - 3z = 3 \end{cases}$$

Entonces:

- (A) El plano y la recta se cortan perpendicularmente.
- (B) La recta está contenida en el plano.
- (C) Ninguna de las otras dos.

6. En el espacio euclídeo tridimensional se consideran los puntos $A = (-1, 2, a)$, $B = (2, 3, 5)$, $C = (5, 5, 3)$. Entonces:

- a) Los tres puntos se sitúan en los vértices de un triángulo equilátero para dos valores negativos de a .
- b) Los tres puntos están situados en los vértices de un triángulo equilátero para dos valores positivos de a .
- c) Ninguna de las otras dos.

7. La ecuación $x - z = 0$ es la de un plano en el espacio:

- a) Que contiene a los ejes Ox y Oz .
- b) Que contiene al eje Oy .
- c) Ninguna de las otras dos.

8. El límite $L = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \ln x - x + 1}{(x-1) \ln x}$

- a) Tiene un valor L comprendido entre $(1/2, 3/2)$.
- b) Tiene un valor L comprendido entre $(0, 1/2)$.
- c) Ninguna de las otras dos

9. Para toda $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ función continua en $[a, b]$ y tal que $f(a)f(b) > 0$, se cumple que:

- (A) Existe algún $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.
- (B) No necesariamente existe algún $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.
- (C) Ninguna de las otras dos.

10. La gráfica de la función $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$ tiene como asíntotas las rectas:

- a) $x = 1$, $x = -1$ e $y = x$
- b) $x = 1$, $x = -1$ e $y = -x$
- c) Ninguna de las otras dos.

11. La función

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

- (A) Es creciente en todo su dominio.
- (B) Es decreciente en $(-\infty, 0)$.
- (C) Ninguna de las otras dos.

12. Se hace una serie de lanzamientos de una moneda para comprobar si está trucada. En los resultados aparece cara 26 veces y cruz 41 veces. ¿Cuál es la frecuencia relativa f del suceso "sale cara"?

- (A) $0,3 < f < 0,4$.
- (B) $0,5 < f < 0,7$.
- (C) Ninguna de las otras dos.

13. Un dado no truncado se lanza 6 veces consecutivas. ¿Cuál es la probabilidad p de que ningún número se repita?
- (A) $0 < p < 0,016$.
(B) $0,016 < p < 0,1$.
(C) Ninguna de las otras dos.
14. Si A y B son sucesos disjuntos de un espacio muestral S , entonces se cumple:
- (A) $P(A \cap B) = P(A) + P(B)$.
(B) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
(C) Ninguna de las otras dos.
15. La cantidad N de números pares que se pueden formar con tres dígitos tomados del conjunto $\{5, 6, 7, 8, 9\}$, cumple que:
- a) $30 \leq N \leq 40$.
b) $25 < N < 35$.
c) Ninguna de las otras dos.

Opción 1

1. Consideremos la siguiente matriz, en la que a es un parámetro real:

$$M = \begin{pmatrix} 2a & -2 & a^2 \\ -1 & a & -1 \\ 2 & 1 & a \end{pmatrix}$$

- Calcular el rango de M en función de los valores de $a \in \mathbb{R}$.
- En el caso $a = 2$, discutir el sistema

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ b \end{pmatrix}$$

en función del parámetro real $b \in \mathbb{R}$ y resolverlo cuando sea posible.

2. Dado el polinomio $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, determinar los valores de los coeficientes $a, b, c \in \mathbb{R}$ de manera que se cumplan las siguientes propiedades:

- $p(x)$ tiene extremos relativos en los puntos de abscisas $x = -1/3$ y $x = -1$.
- La recta tangente a la gráfica de $p(x)$ en el punto $(0, p(0))$ es $y = x + 3$.

Opción 2

3. Dadas las rectas

$$r: \frac{x+3}{-6} = \frac{y-9}{4} = \frac{z-8}{4}$$
$$s: \frac{x-3}{3} = \frac{y-9}{-2} = \frac{z-8}{-2}$$

se pide determinar:

- La posición relativa de r y s .
- La distancia mínima entre r y s .

4. Los aficionados de dos equipos de fútbol están en una fila esperando para comprar entradas. Los del equipo A visten el color de su uniforme, verde, mientras que los del equipo B visten de rojo. En la fila hay siete aficionados vestidos de verde y cuatro de rojo, que han llegado al azar. Se pide calcular la probabilidad de los siguientes sucesos:

- Que el primero y el último de la fila vistan de rojo.
- Que el aficionado en el centro de la fila vista de verde.