Mates Reserva (Canadá)

PREGUNTAS TIPO TEST

Conteste a un máximo de 10 cuestiones.

1. Para todo par A, B de matrices reales cuadradas, se cumple que:
   (A) Si $A + B$ es invertible, o bien A es invertible o bien B es invertible.
   (B) Si $A \cdot B$ es invertible, entonces A y B son invertibles.
   (C) Ninguna de las anteriores.

2. Para todo par A, B de matrices cuadradas tales que $A \cdot B$ es ortogonal, se cumple que:
   (A) A y B son ortogonales.
   (B) Si A es ortogonal, también B es ortogonal.
   (C) Ninguna de las anteriores.

3. Para todo par A, B de matrices reales arbitrarias tales que es posible formar los productos $A \cdot B$ y $B \cdot A$, se cumple que:
   (A) Las matrices $A \cdot B$ y $B \cdot A$ son cuadradas.
   (B) Las matrices A y B son cuadradas.
   (C) Ninguna de las anteriores.

4. Si el sistema

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

es compatible e indeterminado, entonces, el sistema

$$\begin{cases} ax + cy = b \\ dx + ey = f \end{cases}$$

(A) Es compatible determinado.

(B) Es compatible indeterminado.

(C) Ninguna de las anteriores.

5. Sean las rectas $r : (0, -1, -1) + \alpha(1, 3, -4)$ y $s : (1, 0, 0) + b(1, 0, 1)$ en el espacio:

(A) Son secantes.

(B) La distancia entre ellas es $\sqrt{43/43}$.

(C) Ninguna de las otras dos.

6. En el espacio tridimensional, consideremos las rectas

$$r : \begin{cases} x - 2y = 1 \\ z + y = a \end{cases} \quad \text{y} \quad s : \frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{1}$$

(A) Se cortan para algún valor de a en [5, 15].

(B) Se cruzan para el valor $a = 14$.

(C) Ninguna de las otras dos.

7. En el espacio euclídeo tridimensional se consideran los puntos $A = (-1, 2, a)$, $B = (2, 3, 5)$ y $C = (5, 5, 3)$. Entonces:

(A) Los tres puntos no pueden estar situados en los vértices de un triángulo equilátero para ningún valor de a.

(B) Los tres puntos están situados en los vértices de un triángulo equilátero para dos valores positivos de a.

(C) Ninguna de las otras dos.

8. Para toda $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ función derivable en un intervalo abierto (a, b), se cumple que:

(A) Si f' es creciente en (a, b), f es creciente en (a, b).

(B) Si f es creciente en (a, b), f' es creciente en (a, b).

(C) Ninguna de las otras dos.

9. El valor de la integral

$$\int_0^{\pi} x \cos(x)\, dx$$

es:

(A) 1.

(B) -2.

(C) Ninguna de las otras dos.

10. El valor de la integral

$$\int_0^2 \frac{3x^2}{2\sqrt{1+x^3}}\, dx$$

es:

(A) 2.

(B) 1.

(C) Ninguna de las otras dos.

ACADEMIA La llibreta
www.academialallibreta.es
Gran vía Fernando el Católico 23
46008 Valencia

11. El área de la región en el primer cuadrante del plano, limitada por la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$ y la recta $y = x$, es igual a:
(A) 1/6.
(B) 1/3.
(C) Ninguna de las otras dos.

12. Se lanza un dado no trucado cuyas caras están etiquetadas como A, B, C, D, E, F. Sea p la probabilidad de que salga una vocal. ¿Cuánto vale p?
(A) $p < 0.2$.
(B) $0.2 < p < 0.5$.
(C) Ninguna de las otras dos.

13. La cantidad de números pares que se pueden formar con tres dígitos tomados del conjunto {5, 6, 7, 8, 9}, sin usar el mismo dígito en las decenas y las centenas:
(A) Es mayor a 35.
(B) Es menor a 24.
(C) Ninguna de las otras dos.

14. Se lanzan dos dados no trucados simultáneamente. Si la suma de los números que salen es 6, la probabilidad p de que en alguno de los dados haya salido un 5 cumple:
(A) $0.2 < p < 0.3$.
(B) $0.35 < p < 0.45$.
(C) Ninguna de las otras dos.

15. La probabilidad de que el sistema de propulsión de un satélite funcione correctamente es 0.9. La probabilidad de que funcionen tanto el sistema de propulsión como el de control remoto es 0.8. La probabilidad de que el control remoto funcione bien, si ya se lanzó el satélite y se observa que la propulsión funciona bien, cumple que:
(A) $0.8 < p < 0.9$.
(B) $0.7 < p < 0.8$.
(C) Ninguna de las otras dos.

Elija una sola opción y conteste a los problemas en hojas separadas.

Opción 1

1. Si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{pmatrix}$$

y se sabe que $\det A = 4$, calcular el determinante de la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 3a+k & x+5 \\ 3b+k & y+5 \\ 3c+k & z+5 \end{pmatrix},$$

para cualquier valor del parámetro real k.

2. Dada la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$, se pide:

a) Determinar la recta tangente en el punto en el que la función alcanza su máximo relativo.

b) Dibujar el recinto limitado por la curva y la recta tangente del apartado precedente. Calcular el área de este recinto.

Opción 2

3. En $\mathbb{R}^3$ se consideran el plano de ecuación $\pi : x - z = 2$ y la recta r que pasa por $A = (1, 0, 0)$ y $B = (0, 0, b)$, donde b es un parámetro real.

a) Calcular un vector director de r y determinar el valor de b para que r y π sean perpendiculares.

b) Determinar el valor de b para que r y π sean paralelos. ¿Existe algún valor de b para el cual r esté contenida en π?

4. De dos sucesos, A y B, en un experimento aleatorio, se sabe que $p(A) = 0.3$, $p(B) = 0.2$ y $p(A|B) = 0.5$. Calcular $p(A \cap B)$ y $p(A \cup B)$.