ACADEMIA La llibreta
www.academialallibreta.es
Gran vía Fernando el Católico 23
46008 Valencia

Mat II_Reserva 2023_Sol. test

Parte TEST

1. Sea A la matriz real (con a, b, c arbitrarios)

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

Entonces, se cumple:

a) Si $ac = 0$, entonces $rango\ A \leq 1$.
b) Si $a + b + c = 1$, entonces $rango\ A = 1$.
c) Ninguna de las anteriores

2. Consideramos la matriz real

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 & 0 \\ b & 0 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Si $b \neq 0$, la matriz A es invertible.
b) Si $b = 1$, $rango(A) \leq 3$.
c) Ninguna de las anteriores

3. Sea A una matriz real 2x2 tal que su traza (es decir, la suma de los elementos de su diagonal principal) es 5 y su determinante 4. Entonces, la traza de A^{-1}:

a) Es mayor que 1.
b) Es menor que 1.
c) Ninguna de las anteriores.

4. Para todo par A, B de matrices reales cuadradas, se cumple que

a) Si A y B son diagonales, entonces $det(A+B)=det(A)+det(B)$.
b) Si A y B son diagonales, entonces $rango(A+B)=rang(A)+rango(B)$.
c) Ninguna de las anteriores

5. Toda A matriz real $n \times n$ arbitraria de rango r, cumple que

a) Si A es simétrica, entonces $r = n$.
b) La traspuesta A^T tiene rango $rango(A^T)= n - r$.
c) Ninguna de las anteriores.

6. Dados el plano $\pi \equiv 2x + y - 2z = -1$ y la recta

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+2}{1}$$

a) La recta está contenida en el plano
b) Distan 2 unidades
c) Ninguna de las otras dos

7. En el espacio tridimensional, consideramos las rectas:

$$r: \begin{cases} x - 2y = 1 \\ z + y = a \end{cases} \qquad \text{y} \qquad s: \frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{1}$$

a) Son paralelas para todo valor de a
b) Se cortan para algún valor de $a>10$
c) Ninguna de las anteriores

8. Si los puntos de coordenadas $A = (1,0,0)$, $B = (0,1,0)$, $C = (0,0,1)$ son los vértices de un paralelogramo ABCD, entonces las coordenadas del vértice $D = (x, y, z)$cumple:

a) $x + y + z = 1$
b) $x + y + z = 0$
c) Ninguna de las otras dos

9. El límite $L = \lim_{x \to 1} \frac{x \ln x - x + 1}{(x-1) \ln x}$

a) Tiene un valor L comprendido entre $(1/2, 3/2)$.
b) Tiene un valor L comprendido entre $(0, 1/2)$.
c) Ninguna de las otras dos

10. El limite L= $\lim_{x \to 0^+} x^n \ln x$, con $n > 0$:

a) Tiene un valor L < 0 independiente de n
b) No existe
c) Ninguna de las otras dos

11. Para toda $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ función integrable, se cumple que:

a) Si c>a y d>b, entonces $\int_c^d f(x)dx \geq \int_a^b f(x)dx$.
b) Se cumple que $\int_a^b f(-x)dx = \int_{-b}^{-a} f(x)dx$.
c) Ninguna de las otras dos

12. Se pregunta a 50 consumidoras si les gustan dos productos A y B. Hay 37 personas que a las que les gusta el producto A y, de ellas, hay 25 a las que también les gusta el producto B. Hay 3 personas a las que no les gusta ninguno de los dos. Se elige al azar una de las personas entre las que sí les gusta B. ¿Cuál es la probabilidad p de que no le guste A?

(A) $0{,}25 < p < 0{,}3$.
(B) $0{,}2 < p < 0{,}25$.
(C) Ninguna de las otras dos.

13. Se tienen dos sucesos A y B con probabilidades respectivas $p(A) = 0{,}6$, y $p(B) = 0{,}7$

(A) Los sucesos A y B son tales que $A \cup B$ es necesariamente el espacio total.
(B) Los sucesos A y B pueden ser disjuntos.
(C) Ninguna de las otras dos.

14. Un dado no truncado se lanza 6 veces consecutivas. ¿Cuál es la probabilidad p de que ningún número se repita?

(A) $0 < p < 0{,}016$.
(B) $0{,}016 < p < 0{,}1$.
(C) Ninguna de las otras dos.

15. Se lanzan dos dados no cargados simultáneamente. Si la suma de los números que salen es 6, la probabilidad p de que en alguno de los dados haya salido un 5 cumple:

(A) $0{,}2 < p < 0{,}3$.
(B) $0{,}35 < p < 0{,}45$.
(C) Ninguna de las otras dos.

1a) ✓

$$\begin{vmatrix} a & b \\ 0 & c \end{vmatrix} = ac - 0 = 0 \rightarrow \text{si } ac = 0 \rightarrow rg = 1$$

El rango será menor que 1 solo en el caso de que a, b y c sean igual a cero.

1b) si $a+b+c=1$ significa que al menos uno de esos valores es mayor que cero.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ 0 & c \end{vmatrix} = ac - 0 = ac = 0 \begin{cases} \text{si } a>0 \text{ y } c>0 \rightarrow rg=2 \\ \text{si } a \text{ y/o } c = 0 \rightarrow rg = 1 \end{cases}$$

2a) No es correcta

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & a & 2 & 0 \\ b & 0 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{C_3 - C_4} \begin{vmatrix} 1 & a & 2 & 0 \\ b & 0 & 0 & 1 \\ 1 & a & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{Extraemos } a \text{ y } 2} = 2a \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ b & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{Extraemos un det de 3x3}}$$

$$= 2a \begin{vmatrix} b & 0 & 1 & b & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = b - 1 = 0 \rightarrow 2a(b-1) = 0 \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \end{cases}$$

$\exists A^{-1} \longleftrightarrow |A| \neq 0$ $\longrightarrow$ cuando $b=1$ el $\det(A)=0$ y no es invertible

$\longrightarrow$ cuando $b \neq 1$ el $\det(A) \neq 0$ y sí es invertible

2b) es correcta

$b=1 \rightarrow |A|=0 \rightarrow rg\,A \leq 3$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & a & 2 & 0 \\ \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{1} \\ 1 & a & 1 & 1 \\ \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{1} \end{vmatrix}_4 = 0 \longrightarrow \text{Al ser el } |A|_{4\times4}=0 \rightarrow rg\,A \leq 3$$

$F_2 = F_3$

3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \frac{Adj\,A^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}{4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix} = 1 + \frac{1}{4} > 1 \quad a)$$

4

Es una matriz cuadrada cuyos elementos fuera de la diagonal principal son ceros, y los elementos de la diagonal principal al menos uno es distinto de cero.

Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow |A| = 2 \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow |B| = 0$

a) $|A+B| = |A| + |B|$? Recuerda que $|A+B| \neq |A| + |B|$ pero $|AB| = |A| \cdot |B|$

$$|A+B| = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 2 + 0 \quad \text{NO}$$

b) $rg(A+B) = rg(A) + rg(B)$?

$rg(A+B) = 2 \qquad 2 \neq 2+1$ NO

$rg(A) = 2$

$rg(B) = 1$

c) ✓

5

a) Una matriz cuadrada es simétrica si es igual a su transpuesta. $A = A^t$

Por ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{n=2} \longrightarrow A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{n=2}$ $\longrightarrow rg(A)=1$, $\longrightarrow rg(A^t)=1$

$rg(A) = 1 = rg(A^t) \neq n$ NO

b) En este caso no indican que sea simétrica, puede ser otra matriz cualquiera. Por ejemplo:

$A=\begin{pmatrix}1&3\\2&1\end{pmatrix}_2 \quad A^t=\begin{pmatrix}1&2\\3&1\end{pmatrix}_2 \quad \begin{matrix}\to rg\,A=2\\ \to rg\,A^t=2\end{matrix} \qquad rg(A^t)=n-rgA \to 2\neq 2-2$ NO

c) ✓

6

$P=(1,1,-2) \qquad \pi\equiv 2x+y-2z=-1$

$\vec{v_r}=(2,-3,1) \qquad \vec{n}=(2,1,-2)$

a) $P\in\pi \to 2(1)+1-2(-2)=-1$
$7\neq 1$ NO

b) $d(P,\pi)=\dfrac{|Ax+By+Cz+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\dfrac{2(1)+1\cdot 1-2\cdot(-2)+1}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}}=\dfrac{8}{3}\approx 2'\hat{6}$ NO

c) ✓

7

$r:\begin{cases}x=1+2\lambda\\ y=\lambda\\ z=a-\lambda\end{cases} \qquad P_r=(1,0,a) \qquad \vec{v_r}=(2,1,-1) \qquad P_s=(-1,2,0) \qquad \vec{v_s}=(3,1,1) \qquad \vec{P_rP_s}=(-2,2,-a)$

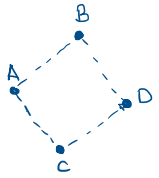
- $\dfrac{\vec{v_r}}{\vec{v_s}} \Rightarrow \dfrac{2}{3}\neq\dfrac{1}{1}\neq\dfrac{-1}{1}$ → se cruzan / secantes

- $\begin{vmatrix}\vec{v_r}\\ \vec{v_s}\\ \vec{P_rP_s}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&1&-1\\3&1&1\\-2&2&-a\end{vmatrix}\begin{matrix}2&1\\3&1\\-2&2\end{matrix}=-2a-2-6+3a-4-2=0$
$\Rightarrow a-14=0 \to a=14$

→ cuando $a=14 \to |A|=0 \to$ SECANTES b)

→ cuando $a\neq 14 \to |A|\neq 0 \to$ CRUZAN

8



$\vec{AB} \parallel \vec{CD} \to \vec{AB}=\vec{CD}$

$\vec{AB}=B-A=(-1,1,0)$

$\vec{CD}=D-C=(x,y,z-1)$

$(-1,1,0)=(x,y,z-1) \to \begin{cases}x=-1\\ y=1\\ z=1\end{cases} \to x+y+z=1$ a)

9

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x\cdot\cancel{\ln x}^{\,0}-x+1}{(x-1)\cancel{\ln x}^{\,0}}=\left(\dfrac{0}{0}\right)^{ind.}\xrightarrow{L'H}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x+\cancel{x}\cdot\frac{1}{\cancel{x}}-1}{\ln x+(x-1)\cdot\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x\ln x+x-1}=\left(\dfrac{0}{0}\right)^{ind}$

$\xrightarrow{L'H}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\frac{1}{x}}{\ln x+\cancel{x}\cdot\frac{1}{\cancel{x}}+1}=\boxed{\dfrac{1}{2}}$ c)

(10) $\lim_{x\to 0^+} x^n \cdot \ln x = (0\cdot\infty)^{ind} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x^n} = \frac{\ln x}{\left[\frac{1}{x}\right]^n} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]^{ind}$

$\xrightarrow{L'H} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-n\cdot x^{(-n-1)}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{-nx\,x^{(-n-1)}} = \frac{1}{-nx^{-n}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^n}{-n} = \boxed{0}$ c)

(11)

a) Depende del tipo de función. La integral de c-d no tiene porqué ser mayor que de a-b.

b) Según la teoría de integración sí es posible ✓

(12)

	A	$\bar{A}$	Tot
B	25	10	35
$\bar{B}$	12	3	15
Tot	37	13	50

Hacemos la tabla poniendo los datos del enunciado y rellenamos el resto:

$P(\bar{A}/B) = \frac{P(\bar{A}\cap B)}{P(B)} = \frac{10}{35} = \boxed{0'29}$

(13) $P(A) = 0'6 \qquad P(B) = 0'7$

a) El espacio muestral es 1 $\rightarrow P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$

$0'6 + 0'7 = 1'3 \rightarrow$ se debe restar 0'3 para que sea igual al E

No es correcta.

b) Disjuntos = incompatibles $\rightarrow P(A\cap B) = 0$

$P(A\cup B) = P(A) + P(B) = 0'6 + 0'7 = 1'3 \rightarrow$ no es posible ≥ 0

que c) ✓

(14) Un dado de 6 caras se lanza 6 veces $\rightarrow$ El nº de casos totales será 6^6

$\text{Laplace} = \frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos totales}} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}{6^2}$ → Todos los casos en los que no se repite ningún nº

$= \frac{5}{324} = 0'0154$ a)

ACADEMIA La llibreta
www.academialallibreta.es
Gran vía Fernando el Católico 23
46008 Valencia

1s Posibilidades de que al lanzar 2 dados sumen 6 (5 casos totales):

{1 + 5} ←
{2 + 4}
{3 + 3}
{4 + 2}
{5 + 1} ←

Solo en dos de estos casos sale un 5.

Por tanto: $\frac{2}{5} = \boxed{0'4}$ b)