La llibreta
Aprendiendo a aprender

ACADEMIA La llibreta
www.academialallibreta.es
Gran vía Fernando el Católico 23
46008 Valencia

Opción 1

1. Estudiar la gráfica de la función $f(x) = e^{2x}$ (dominio, conjunto imagen – o codominio, asíntotas, extremos relativos, crecimiento) y calcular en qué punto (si lo hay) la recta tangente a la gráfica forma un ángulo de 45° (o $\pi/4$ radianes) con el eje de las x.

$f(x) = e^{2x}$

- Dom $f(x) = \mathbb{R}$ ya que no existe ningún valor de x para el cual se anula la función.

  La función es, por tanto, continua en todo su dominio.

- Codominio $f(x) = \mathbb{R}^+$ ya que para cualquier valor de x se obtienen nº reales positivos.

- Asíntotas:

  A.V → No existen ptos de No Dom, por tanto la función no tiene asíntotas verticales.

  A.H → Se encuentran en $\lim_{x \to \pm\infty} f(x)$

  $\lim_{x \to -\infty} e^{2x} = e^{-\infty} = 0$

  $\lim_{x \to +\infty} e^{2x} = e^{\infty} = \infty$

  Existe una A. horizontal en $y = 0$ cuando la función tiende a $-\infty$

  A.O → Se encuentran en $y = mx + n$.

  Al ser incompatible con la A.H, solo la estudiaremos donde $\nexists$ A.H, es decir, $\lim_{x \to +\infty}$

  - $m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{e^{2x}}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\text{ind}} \xrightarrow{L'H} \lim_{x \to +\infty} \frac{2e^{2x}}{1} = \infty \longrightarrow \nexists$ A.O

- Monotonía:

  Los extremos relativos se encuentran en $f'(x) = 0$

  $f(x) = e^{2x} \rightsquigarrow f'(x) = e^{u} \cdot u'$

  $\boxed{f'(x) = 2e^{2x}}$

  $f'(x) = 0 \longrightarrow 2e^{2x} = 0 \longrightarrow$ No existe ningún valor de x, por tanto, no existen ptos relativos.

  Estudiamos el crecimiento con cualquier valor ya que no hay ptos de No Dom ni ptos relativos.

  $f'(1) = e^{2 \cdot 1} = \oplus \longrightarrow$ la función es creciente en todo su dominio.

  Esto tiene sentido ya que anteriormente se ha comentado que la función es estrictamente positiva en todo su dominio $= \mathbb{R}^+$

- Pto donde la recta tg forma 45° con eje x:

  - $\alpha = \operatorname{arctg}(m) \longrightarrow 45° = \operatorname{arctg}(m) \longrightarrow m = \operatorname{tg} 45° = \boxed{1}$

  - Para encontrar $x \longrightarrow f'(x) = m$

$$2e^{2x}=1 \longrightarrow e^{2x}=\frac{1}{2} \longrightarrow 2x=\ln\left(\frac{1}{2}\right) \longrightarrow x=\boxed{\frac{\ln(1/2)}{2}}$$

- Para encontrar $y \longrightarrow f(x)$

$$f\left(\frac{\ln 1/2}{2}\right)=e^{2\left(\frac{\ln 1/2}{2}\right)}=e^{\ln 1/2}=\boxed{\frac{1}{2}}$$

Por tanto, el pto donde la tangente forma $45°$ con el eje x es: $\left(\frac{\ln 1/2}{2},\frac{1}{2}\right)$

2.

a) Estudia la existencia de soluciones al sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x+y+z=a,\\ x+(1+a)y+z=2a,\\ x+y+(1+a)z=0.\end{cases}$$

en función del parámetro real $a\in\mathbb{R}$.

b) Resolver el sistema para el caso $a=1$.

$$A^*=\left(\begin{array}{ccc|c}\overbrace{1 \quad 1 \quad 1}^{A} & & & a\\ 1 & (1+a) & 1 & 2a\\ 1 & 1 & (1+a) & 0\end{array}\right)$$

a)

$\rightarrow$ $|A|=0$ para obtener los valores de a

$$\begin{vmatrix}1&1&1\\1&(1+a)&1\\1&1&(1+a)\end{vmatrix}\begin{matrix}1&1\\1&(1+a)\\1&1\end{matrix}=(a^2+2a+1+1+1)-(1+a+1+1+a)=a^2$$

$a^2=0 \longrightarrow a=0$ (doble)

- si $\boxed{a\neq 0} \longrightarrow |A|_3\neq 0 \longrightarrow \text{rg}\,A=3$

Rg A^* sólo puede ser igual o 1 mayor que rg A. Por tanto: rg $A^*=3$

Según el teorema de Rouché: rg $A=3=$ rg $A^*=$ Nº incógnitas $\longrightarrow$ $\boxed{\text{SCD}}$

- si $\boxed{a=0} \longrightarrow |A|_3=0$

$|A|_2=$ No hay ningún det(A) de orden $2\neq 0$, por tanto, rg(A) = 1

$\longrightarrow |A^*|_3=\begin{vmatrix}1&1&0\\1&1&0\\1&1&0\end{vmatrix}=0$ $\rightsquigarrow$ si hay dos líneas iguales o una nula, su determinante será nulo.

$|A^*|_2=$ No hay ningún det(A^*) de orden $2\neq 0$, por tanto, rg(A^*) = 1

Según el teorema de Rouché: rg $A=1=$ rg $A^*\neq$ Nº incógnitas $\longrightarrow$ $\boxed{\text{SCI}}$

b) $a=1 \rightsquigarrow$ ya hemos dicho que para $a \neq 0$ tenemos SCD.

Resolvemos por Cramer porque $|A| \neq 0$

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \qquad |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

$$X = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{1} = 0 \qquad Y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{1} = 1 \qquad Z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{1} = -1$$

sol: $x=0,\ y=1,\ z=-1$

Opción 2

3. Calcular la integral

$$I = \int \frac{x+2}{x^3 - x}\,dx$$

$$\int \frac{x+2}{x^3-x}\,dx = \int \frac{x+2}{x\underbrace{(x^2-1)}_{(x+1)(x-1)}}\,dx = \int \frac{A}{x}\,dx + \int \frac{B}{x+1}\,dx + \int \frac{C}{x-1}\,dx$$

$$\rightarrow \frac{x+2}{\cancel{x(x^2-1)}} = \frac{A(x^2-1)}{\cancel{x(x^2-1)}} + \frac{Bx(x-1)}{\cancel{x(x^2-1)}} + \frac{Cx(x+1)}{\cancel{x(x^2-1)}}$$

- si $x=0 \longrightarrow 2 = A(-1) \longrightarrow A = -2$
- si $x=1 \longrightarrow 3 = C(1)(2) \longrightarrow C = 3/2$
- si $x=-1 \longrightarrow 1 = 2B \longrightarrow B = 1/2$

$$\rightarrow \int \frac{-2}{x}\,dx + \int \frac{1/2}{x+1}\,dx + \int \frac{3/2}{x-1}\,dx =$$

$$= -2\ln|x| + \frac{\ln|x+1|}{2} + \frac{\ln|x-1|}{2} + C$$

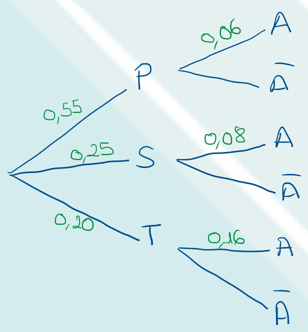
$$= \frac{\ln|x+1| + 3\ln|x-1|}{2} - 2\ln|x| + C$$

4. Se realiza un estudio del absentismo escolar en estudiantes de primer, segundo y tercer curso de ESO, distribuidos de la siguiente manera: el 55% de los estudiantes de la muestra está en primero, el 25% en segundo y el 20% en tercero. Durante el periodo de control se observa absentismo en el 6% de los estudiantes de primero en la muestra, en el 8% de los de segundo y en el 16% de los de tercero. Se pide:

a) ¿Cuál es el porcentaje global de absentismo escolar?
b) Se elige un estudiante al azar y resulta ser absentista. ¿Cuál es la probabilidad de que sea de primer? ¿Y de segundo? ¿Y de tercero?

P = "estudiantes de 1º"   T = "estudiantes de 3º"

S = "estudiantes de 2º"   A = "absentismo" $\bar{A}$ = "No absentismo"



a) Prob. total de absentismo

$P(A) = P(P \cap A) \cup P(S \cap A) \cup P(T \cap A)$

$= (0{,}55 \cdot 0{,}06) + (0{,}25 \cdot 0{,}08) + (0{,}20 \cdot 0{,}16)$

$= 0{,}033 + 0{,}02 + 0{,}032$

$= \boxed{0{,}085} \rightsquigarrow 8{,}5\,\%$

b) Teorema de Bayes → sabemos el final

$P(P/A) = \dfrac{P(P \cap A)}{P(A)} = \dfrac{0{,}55 \cdot 0{,}06}{0{,}085} = 0{,}388 \rightsquigarrow 38{,}8\,\%$

$P(S/A) = \dfrac{P(S \cap A)}{P(A)} = \dfrac{0{,}25 \cdot 0{,}08}{0{,}085} = 0{,}235 \rightsquigarrow 23{,}5\,\%$

$P(T/A) = \dfrac{P(T \cap A)}{P(A)} = \dfrac{0{,}20 \cdot 0{,}16}{0{,}085} = 0{,}376 \rightsquigarrow 37{,}6\,\%$