Soluciones (Seattle)

Opción 1

1. Consideremos las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Calcular razonadamente la inversa de A, A^{-1}.

b) Hallar las matrices X e Y que son solución del sistema

$$\begin{cases} AX + BY = 3I \\ AX - BY = I \end{cases}$$

donde I es la matriz identidad de orden 2.

a) $\exists A^{-1} \longleftrightarrow |A| \neq 0 \longrightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

$A^{-1} = \dfrac{\text{Adj}\,A^t}{|A|} \longrightarrow \text{Adj}\,A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -6 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow A^{-1} = \dfrac{\begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\text{Adj}\,A^t = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\left.\begin{matrix} AX + BY = 3I \\ AX - BY = I \end{matrix}\right\}$ $\begin{matrix} AX + BY = 3I \\ -\;AX - BY = I \\ \hline / \quad 2BY = 2I \end{matrix} \longrightarrow Y = \dfrac{\cancel{2}I}{\cancel{2}B} \rightsquigarrow \boxed{Y = \underbrace{B^{-1}}_{B^{-1}} I}$

si $Y = B^{-1}I \longrightarrow X = \dfrac{I + BY}{A} \longrightarrow X = A^{-1}(I + \underbrace{B \cdot B^{-1}}_{I} I) \longrightarrow \boxed{X = \underbrace{A^{-1}2I}_{2A^{-1}}}$

Calculamos Y:

$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow B^{-1} = \dfrac{\text{Adj}\,B^t}{|B|} = \dfrac{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = Y$

Calculamos X:

$X = 2A^{-1} = 2\begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -12 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

2. Calcular las siguientes integrales indefinidas:

a) $\int \frac{1}{x\sqrt{x-1}}\,dx$

b) $\int \frac{1}{x^2-5x+6}\,dx$

a) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x-1}}\,dx \longrightarrow \left[\begin{matrix} t^2 = x-1 & \longrightarrow & x = t^2+1 \\ t = \sqrt{x-1} & & \downarrow \\ & & dx = 2t\,dt \end{matrix}\right]$

$\displaystyle\int \frac{1}{(t^2+1)\cdot \cancel{t}}\,2\cancel{t}\,dt = \int \frac{2}{t^2+1}\,dt = 2\,\text{arctg}\,t + C$

$\longrightarrow$ Deshacemos el cambio de variable $t = \sqrt{x-1}$

sol $= 2\,\text{arctg}\sqrt{x-1} + C$

b) $\displaystyle\int \frac{1}{\underbrace{x^2-5x+6}_{\substack{\hookrightarrow x=3 \\ \hookrightarrow x=2}}}\,dx = \int \frac{A}{(x-3)}\,dx + \int \frac{B}{(x-2)}\,dx$

$1 = A(x-2) + B(x-3)$

- si $x=2 \longrightarrow 1 = -B \longrightarrow B=-1$
- si $x=3 \longrightarrow 1 = A \longrightarrow A = 1$

$$\int \frac{1}{x-3}dx + \int \frac{-1}{x-2}dx = \ln|x-3| - \ln|x-2| + C$$

SOL: $\ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right| + C$

Opción 2

3.

a) Dados los planos dependientes de un parámetro real $a \in \mathbb{R}$

$$\pi_1: \quad 3x + ay + 2z - 10 = 0$$
$$\pi_2: \quad x - y + az - 5 = 0$$

¿existen valores de a para los cuáles son paralelos? Justifica la respuesta.

b) Hallar la ecuación de la recta paralela a la intersección de los planos

$$\pi: \quad 3x + 2y + z = 10$$
$$\pi': \quad 4x - 2y - 8z = 10$$

que pasa por el punto $(1, 1, 0)$.

a) Dos planos son paralelos cuando se cumple: $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} \neq \frac{D}{D'}$

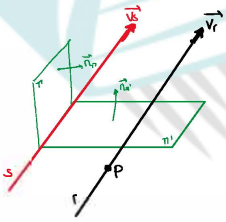
$$\frac{\pi_1}{\pi_2} \longrightarrow \frac{3}{1} = \frac{a}{-1} = \frac{2}{a}$$

- $3 = \frac{a}{-1} \longrightarrow a = -3$
- $\frac{a}{-1} = \frac{2}{a} \longrightarrow a^2 = -2 \rightsquigarrow \nexists$
- $3 = \frac{2}{a} \longrightarrow a = \frac{2}{3}$

Como hay una combinación que no existe, no se cumple la triple igualdad y por tanto, no existe ningún valor de a para el cual π_1 y π_2 sean $\parallel$

b) ¿recta $r \parallel$ a s ? $\in P(1,1,0)$

recta s formada por la intersección de los planos:



$$s \equiv \begin{cases} \pi: 3x + 2y + z = 10 & \longrightarrow \vec{n_\pi} = (3, 2, 1) \\ \pi' = 4x - 2y - 8z = 10 & \longrightarrow \vec{n_{\pi'}} = (4, -2, 8) \end{cases}$$

como $\vec{v_r} \parallel \vec{v_s}$ sacamos el $\vec{v_s}$ de la ecuación general de s:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & -8 \end{vmatrix} \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} \\ 3 & 2 \\ 4 & -2 \end{matrix} = -16\vec{i} + 4\vec{j} - 6\vec{k} + 24\vec{j} + 2\vec{i} - 8\vec{k} = -14\vec{i} + 28\vec{j} - 14\vec{k} \rightsquigarrow (-14, 28, -14)$$
$$\rightsquigarrow (-1, 2, -1) = \vec{v_s}$$

Ec. de la recta que pasa por $P(1,1,0)$ y $\vec{v_s} = (-1,2,-1)$

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = -\lambda \end{cases} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

4. Se tiene una moneda trucada en la que la probabilidad de sacar cara es p y la de sacar cruz es $q = 1 - p$. Se pide:

a) Probabilidad de que salgan exactamente 5 cruces antes de la primera cara.

b) Probabilidad de que en 10 lanzamientos salgan exactamente 3 caras.

c) Probabilidad de obtener 3 caras justamente al cabo del sexto lanzamiento.

p = cara $\qquad q$ = cruz

a) Para que salgan exactamente 5 cruces antes de la primera cara, debemos tener 5 cruces seguidos y luego una cara. La probabilidad de este evento es:

$$q^5 \cdot p$$

En una moneda normal la probabilidad de sacar cara y cruz sería la misma = 50%.

Como está trucada y no tenemos más información, no podemos calcular su valor:

$$P(a) = q^5 \cdot p = (1-p)^5 \cdot p$$

b) Este evento sigue una distribución binomial donde se lanzan 10 monedas y se buscan exactamente 3 caras. La probabilidad es dada por la fórmula de la distribución binomial:

$$P(X=k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{(n-k)}$$

donde:
- k = nº veces de éxito = 3
- n = muestra total
- p = prob. de éxito (caras)
- q = prob. de fracaso (cruces)

$$P(X=3) = \binom{10}{3} \cdot p^3 \cdot q^7$$

$$P(X=3) = 120\, p^3 \cdot q^7$$

c) Para que ocurra esto, necesitamos que las primeras 2 caras ocurran en los primeros 5 lanzamientos, y la tercera cara en el sexto lanzamiento. La probabilidad es:

$$P(X=6) = \binom{5}{2} \cdot \underbrace{p^2 q^3}_{\text{prob de 2 caras}} \cdot \overbrace{p}^{\text{Prob. de la tercera cara}} \longrightarrow P(X=6) = \binom{5}{2} \cdot p^3 \cdot q^3 \longrightarrow P(X=6) = 10\, p^3 q^3$$

Parte TEST

1. Toda matriz real A cuadrada invertible cumple que:
(A) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$, donde A^T es la traspuesta.
(B) $\det(A^{-1}) = -\det(A)$.
(C) Ninguna de las anteriores.

2. Sea A una matriz real 2x2 tal que su traza (es decir, la suma de los elementos de su diagonal principal) es 5 y su determinante 4. Entonces, la traza de A^{-1}:

(A) Es mayor que 1.
(B) Es menor que 1.
(C) Ninguna de las anteriores.

3. Toda A matriz real cuadrada tal que $A^2 = A$, cumple que:

a) $\det(A)>0$.
b) Si A es regular, $A=I$ (la matriz identidad).
c) Ninguna de las anteriores.

4. Consideremos P, Q dos matrices reales cuadradas. El producto de $(PQ)^{-1}$ por P (en ese orden) es igual a:
a) Q^{-1}.
b) $P^{-1}Q^{-1}P$.
c) Ninguna de las anteriores.

5. La distancia del punto (2,1,3) a la recta $x = 2y = 3z$ es:

a) Mayor que 1
b) Menor que 1
c) Ninguna de las otras dos.

6. Las rectas en el espacio de ecuaciones respectivas

$$r: \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-1}$$

$$s: \frac{x+2}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{2}$$

a) Se cruzan.
b) Se cortan en un punto.
c) Ninguna de las otras dos.

7. La distancia del punto P = (2,4, 1) a la recta $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+1}{1}$ es

a) Menor que 1.
b) Mayor que 1.
c) Ninguna de las anteriores.

8. Dadas dos funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ siempre se cumple que:

a) El límite $\lim_{x\to a}(f(x)g(x))$ puede existir aunque no existan $\lim_{x\to a} f(x)$ ni $\lim_{x\to a} g(x)$ por separado.
b) Si existe $\lim_{x\to a} f(x)$ y $\lim_{x\to a}(f(x)g(x))$, entonces existe $\lim_{x\to a} g(x)$.
c) Ninguna de las otras dos

9. El limite L= $\lim x^n \ln x$, con $n > 0$:

a) Tiene un valor L < 0 independiente de n
b) No existe
c) Ninguna de las otras dos

10. Sea $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$. Entonces $f'(x)$ es igual a

a) $\frac{2\sqrt{x^2-1}+1}{2\sqrt{x^2-1}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}$
b) $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
c) Ninguna de las otras dos.

11. La recta tangente en el punto (0, 1) a la gráfica de la función $f(x) = \frac{x^2+3}{x+3}$ es

a) x+3y=3.
b) y+3x=3.
c) Ninguna de las otras dos.

ACADEMIA La llibreta
www.academialallibreta.es
Gran vía Fernando el Católico 23
46008 Valencia

12. Una compañía vende un seguro anual de vida por 240000 euros, por el que hay que pagar 210 euros al año. La probabilidad de que la persona que lo contrata muera en ese año es 0,000408. La ganancia euros esperada por la compañía, G, cumple:

a) $50 \leq G < 100$.
b) $100 \leq G \leq 150$.
c) Ninguna de las otras dos.

13. En un juego de lanzamiento de una moneda no trucada, se ha apostado tres veces seguidas a cara, pero en las tres ocasiones ha salido cruz. Entonces:

a) En la siguiente tirada es mejor seguir apostando cara, porque ya han salido tres cruces y hay más probabilidad de acertar.
b) En la siguiente tirada es mejor apostar cruz, porque hay una "racha" de cruces.
c) Ninguna de las otras dos.

14. La cantidad de números pares que se pueden formar con tres dígitos tomados del conjunto {5, 6, 7, 8, 9}, sin usar el mismo dígito en las decenas y las centenas:

a) Es mayor a 35.
b) Es menor a 24.
c) Ninguna de las otras dos.

15. Una máquina deja de funcionar si dos de sus componentes se rompen, lo cual ocurre con una probabilidad de 0,1. La probabilidad de que se rompa la primera pieza es 0,3. La probabilidad p de que la máquina no funcione si ya se ha roto una pieza cumple:

(A) $0,2 < p < 0,3$.
(B) $0,3 < p < 0,4$.
(C) Ninguna de las otras dos.