Mat 2023

... una sola opción y conteste a los problemas en ...

Opción 1

1

a) Estudiar la posición relativa en el espacio de los planos π_1 y π_2, con ecuaciones respectivas:

$$\pi_1 : x + 2y - z = 3$$
$$\pi_2 : ax + (a-2)y + 2z = 4,$$

en función del parámetro real $a \in \mathbb{R}$.

b) Determinar, en el caso en que los planos se intersecten a lo largo de una recta, un vector director de la misma.

$\pi_1 \equiv x + 2y - z = 3$

$\pi_2 \equiv ax + (a-2)y + 2z = 4$

a) POSICIÓN RELATIVA entre dos planos:

$$\frac{Ax}{A'x} = \frac{By}{B'y} = \frac{Cz}{C'z} = \frac{D}{D'} \longrightarrow \frac{1}{a} = \frac{2}{a-2} = \frac{-1}{2} = \frac{3}{4}$$

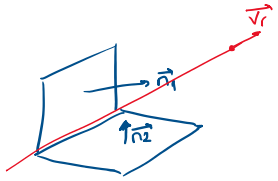
Calculamos el valor de a:

$$\frac{1}{a} = \frac{-1}{2} \longrightarrow a = -2$$

- Si $a = -2 \longrightarrow -\frac{1}{2} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2} \neq \frac{3}{4} \longrightarrow A = B = C \neq D \rightarrow \pi_1$ y π_2 son paralelos

- si $a \neq -2 \longrightarrow A \neq B \neq C \neq D \rightarrow \pi_1$ y π_2 se cortan (secantes)

b) vector cuando $a \neq -2$



$\vec{v_r}$ es $\perp$ a $\vec{n_1}$ y $\vec{n_2}$

$\vec{n_1} = (1, 2, -1)$

$\vec{n_2} = (a, a-2, 2)$

$$\vec{v_r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ a & a-2 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} \\ 1 & 2 \\ a & a-2 \end{matrix} = 4\vec{i} - a\vec{j} + a\vec{k} - 2\vec{k} - 2\vec{j} + a\vec{i} - 2\vec{i} - 2a\vec{k} = 0$$

$$= (a+2)\vec{i} + (-a-2)\vec{j} + (-a-2)\vec{k} = 0$$

$$\vec{v_r} = (a+2, -a-2, -a-2) \longrightarrow (a+2)\cdot(1, -1, -1)$$

Por tanto, el vector que buscamos es $(1, -1, -1)$

misma.

2 Dada la función real

$$f(x) = \ln\sqrt{4-x^2}$$

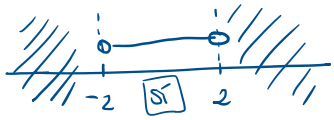
(donde ln denota el logaritmo natural o neperiano), se pide:

a) Representar gráficamente la curva $y = f(x)$, discutiendo razonadamente su dominio, asíntotas, intervalos de crecimiento y extremos relativos.

b) Determinar las pendientes de las rectas tangentes a la gráfica de la función en los puntos donde corta al eje de abscisas. ¿Cuál es el ángulo que forman estas rectas tangentes con el eje de las x?

a) Dom $f(x)$ = Todos los valores de $u > 0$ $\rightarrow u = 4-x^2$

$4-x^2=0 \rightarrow x^2=4 \begin{cases} x=2 \\ x=-2 \end{cases}$



- Dom $f(x) = (-2, 2)$

- Asíntotas:

$\rightarrow$ A.V $\rightarrow$ Existen dos asíntotas verticales en $x=-2$ y en $x=2$ (ptos de NO Dom). Comprobar con $\lim_{x\to\pm 2} f(x)$

No puede tener ni A.H ni A.O porque no puede acercarse a $\pm\infty$ si solo está definida en el intervalo $(-2, 2)$

b) • Ptos de corte (eje de abscisas (x)):

$\rightarrow$ Eje x $\rightarrow y=0 \rightarrow \ln\sqrt{4-x^2}=0 \rightarrow \cancel{\ln e}\sqrt{4-x^2} = \cancel{e}^{0}$

$(\sqrt{4-x^2})^2 = (1)^2 \rightarrow x^2=3 \begin{cases} x=+\sqrt{3}=a \\ x=-\sqrt{3}=a \end{cases}$

$f'(a) = \dfrac{-x}{4-x^2} \begin{cases} f'(\sqrt{3}) = \dfrac{-\sqrt{3}}{4-(\sqrt{3})^2} = -\sqrt{3} \\ f'(-\sqrt{3}) = \dfrac{-(-\sqrt{3})}{4-(-\sqrt{3})^2} = \sqrt{3} \end{cases}$

• Recta tangente: $y - \cancel{f(a)}^{0} = f'(a)(x-a)$

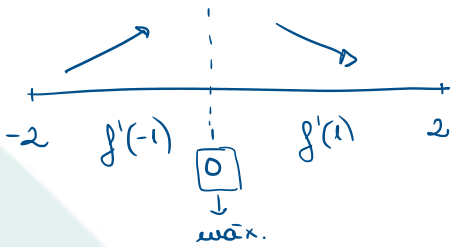
$a=\sqrt{3} \rightarrow \boxed{y = -\sqrt{3}(x-\sqrt{3})}$

$a=-\sqrt{3} \rightarrow \boxed{y = \sqrt{3}(x+\sqrt{3})}$

• Crecimiento: $f'(x) = 0$ $\qquad f(x) = \ln\sqrt{4-x^2}$

$$\rightarrow f'(x) = \frac{\frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{4-x^2}}}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{-x}{(\cancel{\sqrt{4-x^2}})^{\cancel{2}}} = \boxed{\frac{-x}{4-x^2}}$$

$$\rightarrow f'(x)=0 \rightarrow -x = 0 \rightarrow \boxed{x=0}$$



$\begin{cases} \text{La función } f(x) \text{ es creciente } (-2,0) \\ \text{La } f(x) \text{ es decreciente } (0,2) \end{cases}$

Existe un máx. relativo en $(0, 0.7)$

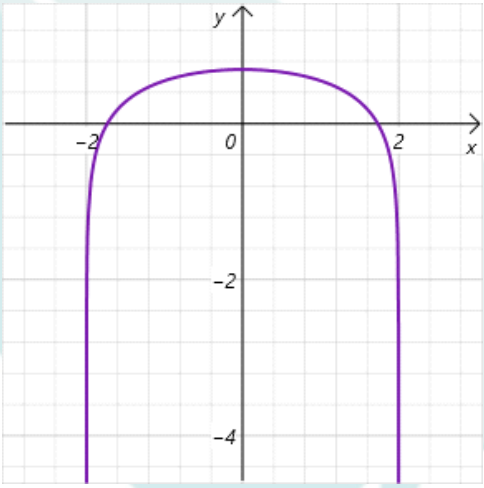


Tabla de valores:

x	y
-1	0.55
-0.5	0.66
1	0.55
0.5	0.66

3 Calcular las integrales indefinidas siguientes:

a)
$$\int \frac{\ln x}{(x+1)^2}\,dx$$

b)
$$\int \frac{xe^x}{(1+x)^2}\,dx$$

a) $$\int \frac{\ln x}{(x+1)^2}\,dx \longrightarrow \begin{cases} u = \ln x \longrightarrow du = 1/x \\ dv = (x+1)^{-2} \longrightarrow v = \frac{(x+1)^{-1}}{-1} = \frac{-1}{x+1} \end{cases}$$

$$= \frac{-\ln x}{x+1} - \int \frac{-1}{x(x+1)}\,dx$$

$$\hookrightarrow -\int \frac{A}{x}dx + \int \frac{B}{x+1}dx$$

$$\frac{-1}{\cancel{x(x+1)}} = \frac{A(x+1)}{\cancel{x(x+1)}} + \frac{Bx}{\cancel{x(x+1)}} \quad \begin{cases} \text{si } x=0 \rightarrow A=-1 \\ \text{si } x=-1 \rightarrow B=1 \end{cases}$$

$$= \int \frac{-1}{x}dx + \int \frac{1}{x+1}dx = -\ln|x| + \ln|x+1| + C$$

$$\underline{\text{SOL}}: -\frac{\ln x}{x+1} + \ln|x+1| - \ln|x| + C = \boxed{\ln\left|\frac{x+1}{x}\right| - \frac{\ln x}{x+1} + C}$$

b) $$\int \frac{xe^x}{(1+x)^2}dx \longrightarrow \begin{cases} u = xe^x \longrightarrow du = e^x + xe^x \\ dv = (1+x)^{-2} \longrightarrow v = \frac{-1}{1+x} \end{cases}$$

$$= \frac{-xe^x}{1+x} - \int \frac{-e^x + xe^x}{1+x}dx$$

$$= \int \frac{e^x\cancel{(1+x)}}{\cancel{1+x}}dx = \int e^x dx = e^x + C$$

$$\underline{\text{SOL}} = \frac{-xe^x}{1+x} + e^x + C = \boxed{\frac{e^x}{x+1} + C}$$

4 Se ha realizado un estudio de valoración de un determinado candidato político, tomando una muestra de 80 hombres y 120 mujeres, con los siguientes resultados (dados en función de un parámetro real $\delta \in \mathbb{R}$):

	Nº hombres	Nº mujeres	Total
Nº valoraciones positivas	$50-\delta$	$40+\delta$	90
Nº valoraciones negativas	$30+\delta$	$80-\delta$	110
Total	80	120	200

Si se elige una persona al azar de entre la muestra, calcular las probabilidades de los siguientes sucesos:

a) Sabiendo que es hombre, que tenga una valoración positiva del candidato.

b) Que sea hombre y favorable al candidato.

c) Que sea mujer o que esté a favor del candidato.

d) ¿Qué valor debe tener el parámetro δ para que los sucesos "ser mujer" y "no estar a favor del candidato" sean independientes?

	Hombres	mujeres	total
Positivo	$P(H \cap P) = 50 - \gamma$	$P(M \cap P) = 40 + \gamma$	$P(P) = 90/200$
Negativo	$P(H \cap N) = 30 + \gamma$	$P(M \cap N) = 80 - \gamma$	$P(N) = 110/200$
Total	$P(H) = 80/200$	$P(M) = 120/200$	200 personas.

a) Sabiendo hombre, que sea positivo?

$$P(P/H) = \frac{P(P \cap H)}{P(H)} = \frac{\frac{50-\gamma}{\cancel{200}}}{\frac{80}{\cancel{200}}} = \frac{50-\gamma}{80} \longrightarrow [50, 80]$$

b) ¿Hombre y favorable?

$$P(H \cap P) = P(H) + P(P) - \underbrace{P(H \cup P)}$$

$$= \cancel{P(H)} + \cancel{P(P)} - \cancel{P(H)} - \cancel{P(P)} + P(H \cap P) = \frac{50-\gamma}{200} \longrightarrow [50, 200]$$

c) ¿Mujer ó favorable?

$$P(M \cup P) = P(M) + P(P) - P(M \cap P)$$

$$= \frac{120}{200} + \frac{90}{200} - \frac{40+\gamma}{200} = \frac{170+\gamma}{200} \longrightarrow [170, 200]$$

d) γ para que $P(M)$ y $P(N)$ sean independientes?

$$P(M \cap N) = P(M) \cdot P(N)$$

$$\frac{80-\gamma}{200} = \frac{120}{200} \cdot \frac{110}{200} \longrightarrow \frac{80-\gamma}{200} = 0'33$$

$$= 80 - \gamma = 66 \longrightarrow \gamma = 80 - 66 = \boxed{14}$$