Mat 2023_Test

PREGUNTAS TIPO

Conteste a un máximo de 10 cuestiones.

1 Sea A la matriz real (con a, b, c arbitrarios)

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

Entonces, se cumple:

(A) Si $b = c$, entonces rango$(A) = 1$.

(B) Si $b = 0$, entonces rango$(A) = 2$.

(C) Ninguna de las anteriores.

2 Toda matriz real A cuadrada invertible cumple que:

(A) $(A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top$, donde $A^\top$ es la traspuesta.

(B) $\det(A^{-1}) = -\det(A)$.

(C) Ninguna de las anteriores.

3 Si la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & \lambda \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

es ortogonal, entonces:

(A) $\lambda > 0$.

(B) $\lambda < 0$.

(C) Ninguna de las anteriores.

4 Toda A matriz real cuadrada tal que $A^2 = A$, cumple que:

(A) $\det(A) > 0$.

(B) Si A es regular, $A = I$ (la matriz identidad).

(C) Ninguna de las anteriores.

5 Sean las rectas $r : (0, -1, 1) + a(1, 3, -4)$ y $s : (1, 0, 0) + b(1, 0, 1)$ en el espacio:

(A) Son secantes.

(B) La distancia entre ellas es $\sqrt{43}/43$.

(C) Ninguna de las otras dos.

6 La distancia del punto $(2, 1, 3)$ a la recta $x = 2y = 3z$ es:

(A) Mayor que 1.

(B) Menor que 1.

(C) Ninguna de las otras dos.

7 En el espacio tridimensional se consideran el plano $\pi : 3x - 2y - z = 2$ y la recta

$$r : \begin{cases} 2x + 2y + 2z = 1 \\ x + 3y - 3z = 3 \end{cases}$$

Entonces:

(A) El plano y la recta se cortan perpendicularmente.

(B) La recta está contenida en el plano.

(C) Ninguna de las otras dos.

8 Para toda $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), se cumple que:

(A) Existe un $\theta \in (a, b)$ tal que $f(b) = f'(\theta)(b - a)$.

(B) Existe un $\theta \in (a, b)$ tal que $f(b) = f(a) + f'(\theta)(b - a)$.

(C) Ninguna de las otras dos.

9 El límite $L = \lim_{x \to 0^+} x^n \ln x$, con $n > 0$:

(A) Tiene un valor $L < 0$ independiente de n.

(B) No existe.

(C) Ninguna de las otras dos.

10 Para toda $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ función continua en $[a, b]$ y tal que $f(a)f(b) > 0$, se cumple que:

(A) Existe algún $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

(B) No necesariamente existe algún $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

(C) Ninguna de las otras dos.

11 La función

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

(A) Es creciente en todo su dominio.

(B) Es decreciente en $(-\infty, 0)$.

(C) Ninguna de las otras dos.

12 Se tiene un bote con caramelos de colores: rojo, amarillo, verde, azul y naranja. Se sabe que la probabilidad de sacar al azar un caramelo rojo es 0,2, la de sacar uno amarillo es 0,15, uno verde 0,1 y uno azul 0,3. Si se sacan 60 caramelos de la bolsa, ¿cuántos esperaríamos que haya de color naranja (denotamos ese número por N)?

(A) $8 \leq N \leq 14$.

(B) $13 \leq N \leq 18$.

(C) Ninguna de las otras dos.

13 Se pregunta a 50 consumidores si les gustan dos productos A y B. Hay 37 personas que a las que les gusta el producto A y, de ellas, hay 25 a las que también les gusta el producto B. Hay 3 personas a las que no les gusta ninguno de los dos. Se elige al azar una de las personas entre las que sí les gusta B. ¿Cuál es la probabilidad p de que no le guste A?

(A) $0{,}25 < p < 0{,}3$.

(B) $0{,}2 < p < 0{,}25$.

(C) Ninguna de las otras dos.

14 Se tienen dos sucesos A y B con probabilidades respectivas $p(A) = 0{,}6$ y $p(B) = 0{,}7$. Entonces:

(A) Los sucesos A y B son tales que $A \cup B$ es necesariamente el espacio total.

(B) Los sucesos A y B pueden ser disjuntos.

(C) Ninguna de las otras dos.

15 Un dado no trucado se lanza dos veces. ¿Cuál es la probabilidad p de sacar un 2 en la primera tirada y no sacar el 4 en la segunda?

(A) $0{,}1 < p < 0{,}15$.

(B) $0{,}15 < p < 0{,}2$.

(C) Ninguna de las otras dos.

1 a) Si $b=c$ → no

ejemplo: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow rg(A) = 2$

b) si $b=0$ → no

ejemplo: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow rg(A) = 1$

c) opción correcta

2 Teoría

a) La inversa de la transpuesta es igual a la transpuesta de la inversa: $(A^t)^{-1}=(A^{-1})^t$. ✓

b) No es correcta porque $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

3 Una matriz ortogonal es una matriz cuadrada cuya matriz inversa coincide con su matriz traspuesta.

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & \lambda \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} \longrightarrow A \cdot A^t = I$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1/2 & \lambda \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \lambda & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \boxed{1/4 + \lambda^2} & -\sqrt{3}/4 - \lambda/2 \\ \boxed{-\sqrt{3}/4 - \frac{\lambda}{2}} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 \\ \boxed{0} & 1 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow \frac{1}{4} + \lambda^2 = 1 \rightarrow \lambda^2 = \frac{3}{4}$ → $\lambda = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\lambda = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\rightarrow -\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\lambda}{2} = 0 \rightarrow \lambda = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Tiene que ser el mismo valor en todas las ecuaciones. opción correcta b)

4 a) $A^2 = A \rightarrow |A \cdot A| = |A| \rightarrow |A \cdot A| - |A| = 0 \rightarrow |A| \cdot (1 - |A|) = 0$ → $|A| = 0$, $1 - |A| = 0 \rightarrow |A| = 1$

det > 0 → no, porque puede ser igual a cero.

b) matriz regular = $\exists A^{-1}$

$$A^2 = A \rightarrow A\cdot A = A \rightarrow \underbrace{A\cdot A\cdot A^{-1}}_{I} = \underbrace{A\cdot A^{-1}}_{I} \rightarrow \underbrace{A\cdot I}_{A} = I \rightarrow A = I \checkmark$$

opción correcta b)

5) $r = (0,-1,1) + \alpha(1,3,-4)$

$s = (1,0,0) + b(1,0,1)$

$\overrightarrow{P_rP_s} = (1,1,-1)$

Pos. relativa

1) $\frac{1}{1} \neq \frac{3}{0} \neq \frac{-4}{1}$ → se cortan / se cruzan

2) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow$ se cruzan

r y s cruzan $\rightarrow d(r,s) = \dfrac{|\vec{v_r} \times \vec{v_s} \times \overrightarrow{P_rP_s}|}{|\vec{v_r} \times \vec{v_s}|} = \boxed{\dfrac{1}{\sqrt{43}} \text{ u.}} \approx \dfrac{\sqrt{43}}{43}$ b)

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} \\ 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{matrix} = 3\vec{i} - 4\vec{j} - \vec{j} - 3\vec{k} = (3,-5,-3)$$

6) $d(P,s)$ $\quad P(2,1,3)$

$s \equiv x = 2y = 3z \rightarrow \begin{cases} y = \lambda \\ x = 2\lambda \\ z = \frac{2\lambda}{3} \end{cases}$ $\quad P_s = (0,0,0)$ $\quad \vec{v_s} = (2,1,2/3)$ $\quad \overrightarrow{PP_s} = (-2,-1,-3)$

$$d(P,s) = \frac{|\overrightarrow{PP_s} \times \vec{v_s}|}{|\vec{v_s}|} = \frac{\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & 2/3 \end{vmatrix}}{\sqrt{1^2+2^2+(2/3)^2}} = > 1 \quad a)$$

7) $\pi \equiv 3x - 2y - z = 2 \rightarrow \vec{n} = (3,-2,-1)$

$r \equiv \begin{cases} 2x + 2y + 2z = 1 \\ x + 3y - 3z = 3 \end{cases} \rightarrow \vec{v_r} = (1,3,-3)$

$\vec{v_r} \cdot \vec{n} = (3,-2,-1)\cdot(1,3,-3) = 0 \rightarrow$ son perpend. op a)

(8) continua en $[a,b]$ } $\exists c \in (a,b)$ → Teorema del valor medio
derivable en (a,b) } $f'(c)=0$

$$\left[f'(c) = \frac{[f(b)]-f(a)}{b-a}\right] \rightarrow f(b) = f'(c)\cdot(b-a)+f(a)$$ opc b)

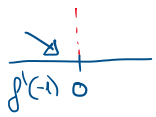
(9) $$\lim_{x\to 0^+} x^n \cdot \ln x = (0\cdot\infty)^{ind} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x^{-n}} = \frac{\ln x}{\left[\frac{1}{x}\right]^n} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]^{ind}$$

$$\xrightarrow{L'H} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-n\cdot x^{(-n-1)}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{-xnx^{(-n-1)}} = \frac{1}{-nx^{-n}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^n}{-n} = 0$$

(10) Similar al teorema de Bolzano → $f(a)\cdot f(b) < 0$
El enunciado no aplica bien las condiciones del teorema por lo que
No necesariamente existe $c \in (a,b)$ opción b)

(11) Dom $f(x) = \mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{2(e^x - e^{-x})}{4} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = 0 \rightarrow$$ $f'(-1)$ 0 decrece $(-\infty, 0)$ b)



$x=0 \rightarrow$ mín relativo

(12) $P(\text{naranja}) = 1 - (0'2 + 0'15 + 0'1 + 0'3) = 0'25$

$E(x) = n\cdot p = 0'25 \cdot 60 = \boxed{15}$ b)

(13)

	A	$\bar{A}$	Tot
B	25	10	35
$\bar{B}$	12	3	15
Tot	37	13	50

Hacemos la tabla poniendo los datos del enunciado y rellenamos el resto:

$$P(\bar{A}/B) = \frac{P(\bar{A}\cap B)}{P(B)} = \frac{10}{35} = \boxed{0'29}$$

14 $P(A) = 0'6$ $P(B) = 0'7$

a) El espacio muestral es 1 $\rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$0'6 + 0'7 = 1'3 \rightarrow$ se debe restar 0'3 para que sea igual al E

No es correcta.

b) Disjuntos = incompatibles $\rightarrow P(A \cap B) = 0$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0'6 + 0'7 = 1'3 \rightarrow$ no es posible > 0

opc c) ✓

15 $P(2) = \frac{1}{6}$

$P(\bar{4}) = \frac{5}{6}$

$P(2 \cap \bar{4}) = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = 0'13\overline{8}$ a)