UNIVERSIDAD NACIONAL DE EDUCACIÓN A DISTANCIA

Prueba de Competencia Específica. Matemáticas. Curso 2017/18.

PREGUNTAS DEL TEST

Modelo 1-A

1. El valor del límite

$$\lim_{x \to 0} \frac{x \operatorname{sen} x}{\log(1+x^2)}$$

(donde log significa logaritmo neperiano), es:

a) 1. *b*) π. *c*) $\pi/2$.

2. El rango de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{es:}$$

a) 1. *b*) 2. *c*) 3.

3. El conjunto de soluciones del sistema

$$\begin{cases} x+y+z = 0 \\ x-y-z = 0 \end{cases}$$

define:

a) Un punto en el espacio.

b) Una recta en el espacio.

c) Un plano en el espacio.

4. El coseno del ángulo θ formado por los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$, determinados por los puntos $A(2,1,0), B(3,0,0)$ y $C(4,1,2)$, es:

a) $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

b) $\cos\theta = \frac{1}{2}$.

c) $\cos\theta = 0$.

5. Las rectas:

$$r_1 : \frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-1}{1}$$

$$r_2 : \frac{x-2}{1} = \frac{y-k}{1} = \frac{z-2}{2}$$

se cortan en un punto para el valor de k:

a) $k=0$. *b*) $k=1$. *c*) $k=2$.

6. El área del triángulo cuyos vértices son los puntos $P=(1,2,-3), Q=(-2,1,0)$ y $O=(0,0,0)$ es:

a) $\frac{\sqrt{70}}{\sqrt{2}}$. *b*) $\frac{70}{\sqrt{2}}$. *c*) $\frac{\sqrt{70}}{2}$

7. La función

$$f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$$

corta al eje X en:

a) Un único punto.

b) Dos únicos puntos.

c) Tres puntos.

8. La gráfica de la función

$$f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$$

tiene como asíntota la recta:

a) $x=3$.

b) $y=x+2$.

c) $y=-x+2$.

9. La integral

$$\int_0^{\pi/4} x \operatorname{sen} x \, dx$$

vale:

a) $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$. *b*) $\frac{1}{2}\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$. *c*) 0.

10. Sean A y B dos sucesos de un espacio muestral E, donde $\overline{A}$ y $\overline{B}$ denotan los sucesos contrarios. Tenemos asignada una probabilidad en E de modo que $P(A \cap B) = 1/9$ y $P(A \cap \overline{B}) = 2/9$, entonces:

a) $P(B|A) = 1/3$.

b) $P(B|A) = 2/81$.

c) $P(B|A) = 1/9$.

Soluciones TIPO TEST

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\cdot \operatorname{sen}x}{\log(1+x^2)} = \left(\dfrac{0}{0}\right)^{ind} \xrightarrow{L'H} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}x + x\cdot\cos x}{\frac{2x}{1+x^2}\cdot \log e} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{0}{0}\right)^{ind.}$

$\xrightarrow{L'H} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x + \cos x + x\cdot \operatorname{sen}x}{\frac{2\cdot(1+x^2) - 2x\cdot 2x}{1+x^2}\cdot \cancel{\frac{e}{e}}\cdot \cancel{\log e}}$

$\longrightarrow \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2}{\frac{2+\cancel{2x^2}}{1}\cdot \cancel{\log e}} = \dfrac{2}{2\log e} = \dfrac{2}{2} = 1$

2)

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right| = 4+6-0 = 10 \neq 0 \rightarrow rg(A) = 3$$

3) Teoría

4)

$$\cos\phi = \frac{\vec{AB}\cdot\vec{AC}}{|AB|\cdot|AC|} = \frac{2}{\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

5)

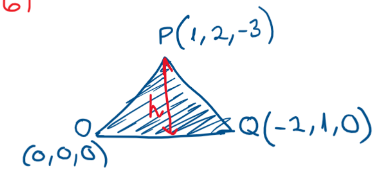
$\vec{V_{r1}} = (1,3,1) \qquad \vec{V_{r2}} = (1,1,2)$

$P_{r1} = (2,3,1) \qquad P_{r2} = (2,K,2)$

$\vec{P_{r1}P_{r2}} = P_{r2} - P_{r1} = (0, K-3, 1)$

$$\begin{vmatrix} \vec{V_{r1}} \\ \vec{V_{r2}} \\ \vec{P_{r1}P_{r2}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & K-3 & 1 \end{vmatrix} \longrightarrow \boxed{K=1}$$

6)



$$\left.\begin{array}{l}\vec{OP}=(1,2,-3)\\ \vec{OQ}=(-2,1,0)\end{array}\right\}\rightarrow \begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 2 & -3\\ -2 & 1 & 0\end{vmatrix}\begin{matrix}\vec{i} & \vec{j}\\ 1 & 2\\ -2 & 1\end{matrix} = 6\vec{j}+\vec{k}+3\vec{i}+4\vec{k} \rightarrow (3,6,5)$$

$$A_T=\frac{|\vec{OP}\times\vec{OQ}|}{2}=\frac{\sqrt{3^2+6^2+5^2}}{2}=\boxed{\frac{\sqrt{70}}{2}\,u^2}$$

7)

$$f(x)=\frac{x^3}{(x-1)^2}=0 \longrightarrow x^3=0 \rightarrow \underline{1\ \text{solución}}$$

8)

- AV en $x=1$ → Pto No Dom.
- AH → $\nexists$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{(x-1)^2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\xrightarrow{\text{Num}>\text{Den}}=\infty \rightarrow \nexists\,\text{A.H}$$

- AO → $y=mx+n$ → $\exists$ AO en $y=x+2$

$$m:\ \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\frac{\frac{x^3}{(x-1)^2}}{x}=\frac{x^3}{x(x-1)^2}=\boxed{1}$$

$$n:\ \lim_{x\to\infty} f(x)-mx=\frac{x^3}{(x-1)^2}-x=\frac{x^3-x(x-1)^2}{(x-1)^2}=\frac{\cancel{x^3}-\cancel{x^3}+2x^2-x}{(x-1)^2}=\frac{2}{1}=\boxed{2}$$

$(x^2-2x+1)\cdot x$

9)

$$\int_0^{\pi/4} x\cdot \text{sen}x\,dx=\left\{\begin{array}{l}u=x \longrightarrow du=1\\ dv=\text{sen}x \longrightarrow v=-\cos x\end{array}\right.$$

$$-x\cdot\cos x-\int -\cos x\cdot 1\,dx=-x\cdot\cos x+\text{sen}x\Big]_0^{\pi/4}=\frac{-\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{4}=\boxed{0'15}\,u^2\approx\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$$

10)

$$P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{1/9}{1/3}=\boxed{1/3}$$

$$P(A\cap\bar{B})=P(A)-P(A\cap B)$$
$$2/9=P(A)-1/9$$
$$P(A)=1/3$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE EDUCACIÓN A DISTANCIA

Prueba de Competencia Específica. Matemáticas. Curso 2017/18.

PROBLEMAS

Modelo 1-A

1. Estudiar la posición relativa de los planos

$$\begin{aligned} \pi_1 &: mx + z = 1 \\ \pi_2 &: my - z = 0 \\ \pi_3 &: (m+1)x + y + 2z = m + 1 \end{aligned}$$

según los valores de m.

2. Hallar las asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función:

$$f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$$

Hacer un esbozo de la gráfica de f.

Soluciones PROBLEMAS

Problema 1

$$\overbrace{\begin{array}{ccc} m & 0 & 1 \\ 0 & m & -1 \\ m+1 & 1 & 2 \end{array}}^{A}\left|\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ m+1 \end{array}\right. \qquad \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} m & 0 & 1 & 1 \\ 0 & m & -1 & 0 \\ m+1 & 1 & 2 & m+1 \end{array}\right)}_{A^*}$$

$$|A|_{3x3} = \begin{vmatrix} m & 0 & 1 \\ 0 & m & -1 \\ m+1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \longrightarrow m^2 = 0 \Rightarrow \boxed{m=0}$$

→ caso 1: cuando $\boxed{m=0}$

$$|A|_{3x3} = 0 \rightarrow rg(A) \leq 2$$

$$|A| = \begin{vmatrix} m & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow rg(A) = 2$$

$$|A|^*_{3x3} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow rg(A^*) = 3$$

$$\left.\right\} rgA = 2 \neq rg A^* = 3$$

→ Pos. relativa 2 planos // y un 3º plano CORTA.

Descartamos si hay planos //:

→ Cuando $m \neq 0$

$$|A| \neq 0 \rightarrow rg(A) = 3$$

$$rg A^* \geq rg A \rightarrow rg(A^*) = 3$$

$$\left.\right\} rgA = 3 = rgA^* = N^{\circ} incog \rightarrow \underline{\underline{SCD}}$$

Pos. rel. 3 planos se cortan en 1 punto.

Problema 2

$\text{Dom} = \mathbb{R} \sim \{0\}$

$\boxed{A.V} \rightarrow$ en ptos NO Dom

$e^x - 1 = 0 \rightarrow e^x = 1 \rightarrow \ln e^x = \ln 1 \rightarrow x = 0$

comprobación $\rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{x}{e^x-1} = \left(\frac{0}{0}\right) \xrightarrow{L'H} \frac{1}{e^x} = \frac{1}{1} = \boxed{1} \rightarrow \nexists A.V$

$\boxed{A.H} \rightarrow \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{e^{\infty}-1} = \frac{\infty}{\infty} = \boxed{0}$

$$\begin{cases} e^{\infty} = \infty \\ e^{-\infty} = 0 \\ \frac{\pm\infty}{0} = \infty \end{cases}$$

$\lim_{x\to -\infty} \frac{x}{e^{-\infty}-1} = \frac{-\infty}{0} = \boxed{-\infty} \quad \nexists A.H$

$\hookrightarrow -\infty \cdot e^{\infty} = -\infty \cdot \infty = -\infty$

$\rightarrow$ Existe una asíntota horizontal en $y = 0$ cuando $\lim_{x\to +\infty}$

$\boxed{A.O}$ Solo existe donde no hay horiz. $\rightarrow y = mx + n$

$m = \lim_{x\to -\infty} \frac{\frac{x}{e^x-1}}{x} = \frac{x}{\cancel{x e^{-\infty}} - x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x}{-x} = \boxed{-1}$

$n = \lim_{x\to -\infty} \frac{x}{e^x-1} + x = \frac{\cancel{x} + x\cdot e^x \cancel{-x}}{x\cdot e^x} = \boxed{0}$

$\rightarrow$ Existe A.O. en $y = -x$

Intervalos $\rightarrow f'(x) = 0$

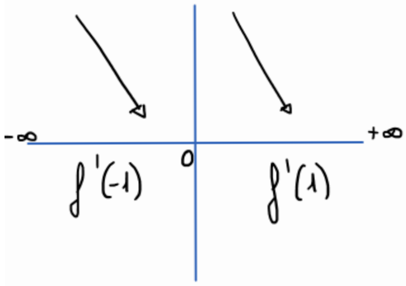
$f(x) = \frac{x}{e^x-1} \rightarrow f'(x) = \frac{(e^x-1) - [x\cdot(e^x-0)]}{(e^x-1)^2} = \boxed{\frac{e^x - xe^x - 1}{(e^x-1)^2}}$

$f'(x) = 0 \rightarrow \frac{e^x - xe^x - 1}{(e^x-1)^2} = 0 \rightarrow e^x - e^x x = 1$

$e^x(1-x) = 1$

$\rightarrow e^x = 1 \rightarrow \ln e^x = \ln 1 \rightarrow x = 0$

$\rightarrow 1 - x = 1 \rightarrow x = 0$



$f'(-1) = \ominus$

$f'(1) = \ominus$

$x = 0$ no es un pto relativo puesto que es un pto de No Dominio.

No hay máx ni mín.

La función decrece en todo su dominio → $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$