PCE_Matemáticas II_ Junio 2019_ TIPO TEST

Bloque 1.
10 Preguntas objetivas de opción múltiple (hasta 5 puntos). Las respuestas erróneas penalizan –0,15 puntos.

1. Si
$\vec{u} = (0, 3, 5)$
y
$\vec{v} = (1, -1, 2)$
entonces el producto vectorial de ambos es:
a)
$\vec{u} \times \vec{v} = (1, 5, -3)$
b)
$\vec{u} \times \vec{v} = (11, 5, -3)$
c)
$\vec{u} \times \vec{v} = (1, 5, 3)$

$$\begin{cases} \vec{u} = (0,3,5) \\ \vec{v} = (1,-1,2) \end{cases} \qquad \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} \\ 0 & 3 \\ 1 & -1 \end{matrix} = 6\vec{i} + 5\vec{j} - (-5\vec{i} + 3\vec{k}) =$$

$$= 6\vec{i} + 5\vec{j} + 5\vec{i} - 3\vec{k}$$

$$= 11\vec{i} + 5\vec{j} - 3\vec{k} \rightarrow (11, 5, -3)$$

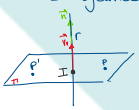
2. El punto P' simétrico $P(1,0,1)$ respecto a la recta $r: (x, y, z) = \underbrace{(1, 0, 0)}_{P_r} + \lambda \underbrace{(0, 1, 1)}_{\vec{v_r}}$

a) $P'(1, 1, 1)$
b) $P'(1, 1, 0)$
c) $P'(-1, 1, -1)$

1º) Sacamos pto y vector de r.

$$\begin{cases} P_r = (1,0,0) \\ \vec{v_r} = (0,1,1) \end{cases} \rightarrow r = \begin{cases} x = 1 + 0\lambda \\ y = 0 + 1\lambda \\ z = 0 + 1\lambda \end{cases}$$

2º) Dibujamos y creamos plano aux.



$\boxed{\vec{v_r} = \vec{n}}$

· I = pto de intersección entre r y π.

El plano queda definido por

$P = (1, 0, 1)$ y $\vec{n} = (0, 1, 1)$
x y z A B C

3º) Sacamos ec. del plano π

$Ax + By + Cz + D = 0$

$0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + D = 0 \rightarrow \boxed{D = -1}$

$\pi: y + z - 1 = 0$

4) Calculamos I entre r y π

$$r = \begin{cases} x = 1 \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \qquad \pi: y + z - 1 = 0$$

· $I = \lambda + \lambda - 1 = 0 \rightarrow 2\lambda - 1 = 0 \rightarrow \lambda = 1/2$

$$r = \begin{cases} x = 1 \\ y = 1/2 \\ z = 1/2 \end{cases} \rightarrow I = (1, 1/2, 1/2)$$

5) Si nos fijamos, I es el pto medio entre P-P'

Fórmula pto medio → $\vec{I} = \frac{P + P'}{2} \rightarrow \boxed{P' = 2I - P}$

$P' = 2(1, 1/2, 1/2) - (1, 0, 1)$

$= (2, 1, 1) - (1, 0, 1)$

$= (1, 1, 0)$

3. La distancia del punto $P(\overset{x}{4}, \overset{y}{6}, \overset{z}{0})$ al plano $\pi: \overset{A}{2}x \overset{B}{-y} + \overset{C}{2}z \overset{D}{+1} = 0$ es:

a) 1
b) 2
c) 3

$$d(P, \pi) = \frac{Ax + By + Cz + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{2 \cdot 4 - 1 \cdot 6 + 2 \cdot 0 + 1}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{3}{\sqrt{9}} = \boxed{1}$$

ACADEMIA La llibreta Aprendiendo a aprender

$\pi \div X + 2Y - Z = 2$

$r \div \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z-5}{4}$ n.

c) La recta está contenida en el plano.

- $P_r = (3,2,5)$
- $\vec{v_r} = (2,1,4)$
- $\vec{n} = (1,2,-1)$

$\vec{v_r} \cdot \vec{n} = (2,1,4)\cdot(1,2,-1) = 0 \rightarrow$ Si $\vec{v}\cdot\vec{n} = 0$ $\begin{cases} \text{Son } // \\ \text{Son contenidos} \end{cases}$

$\neq 0 \rightarrow$ cortan / cruzan

¿Son paralelos?

$\frac{2}{1} \neq \frac{1}{2} \neq \frac{4}{-1} =$ NO

¿Son contenidos?

$\pi: x + 2y - z = 2$

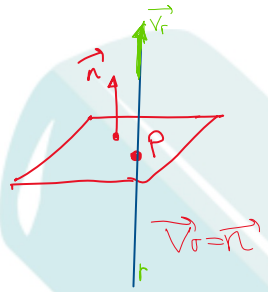
$P = (3,2,5)$

$\underbrace{3 + 2\cdot 2 - 5}\ \underbrace{=}\ \underbrace{2}$

$\boxed{2 = 2}$ Sí

5. La ecuación del plano que es ortogonal a la recta $r: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1}$ y pasa por el punto $P(1,1,1)$ es:

a) $x + y + z = 3$
b) $x - y + z = 1$
c) $x + y + z = 1$



$\begin{cases} P_r = (0,1,0) \\ \vec{v_r} = (1,1,1) \end{cases}$

A B C

- $Ax + By + Cz + D = 0$

$1\cdot 1 + 1\cdot 1 + 1\cdot 1 + D = 0$

$D = -3$

$x + y + z = 3$

6. El valor del siguiente límite es

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 + n + 1}{n^2 + 3}$$

a) 3.
b) No existe.
c) Infinito.

$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2}{x^2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{ind} = \frac{3}{1} = \boxed{3}$

$\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{ind}$ $\begin{cases} N^o > D^o \rightarrow = \pm\infty \\ N^o = D^o \rightarrow \text{Núm} \\ N^o < D^o \rightarrow = 0 \end{cases}$

7. Sea A una matriz 3 x 3 tal que $A^3 = -I$

siendo I la matriz identidad, entonces

a)
$A^{10} = A$

b)
$A^{10} = -A$

c)
$A^{10} = I$

$A^{10} = \underbrace{A^3}_{-I} \cdot \underbrace{A^3}_{-I} \cdot \underbrace{A^3}_{-I} \cdot A^1$

$A^{10} = -I \cdot A = \boxed{-A}$

$A \cdot \cancel{I}^{1}$

8. Dados los sucesos de un experimento aleatorio A y B, con probabilidades:

$\rho(A) = \frac{4}{9}$, $\rho(B) = \frac{1}{3}$ y $\rho(A \cup B) = \frac{2}{3}$

se verifica que la probabilidad de $A|B$ es:

a) $P(A|B) = \frac{4}{9}$

b) $P(A|B) = \frac{2}{9}$

c) $P(A|B) = \frac{1}{3}$

$$\boxed{P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}} = \frac{1/9}{1/3} = \boxed{1/3}$$

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)}$$

$$= 4/9 + 1/3 - 2/3 = 1/9$$

9. En una bolsa hay 10 bolas rojas, 15 amarillas y 5 azules. Si se extraen de la bolsa dos bolas sin reemplazamiento la probabilidad de que las dos sean rojas es:

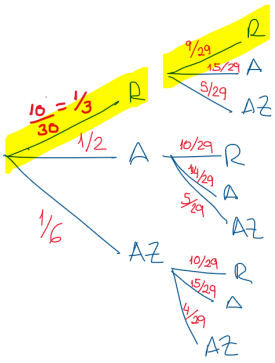
a) $\frac{3}{29}$

b) $\frac{1}{3}$

c) $\frac{9}{29}$

10 R
15 A
5 A → TOTAL 30 Bolas → −1 = 29 Bolas

$n(x)$



$$P(R \cap R) = \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{29} = \frac{3}{29}$$

10. En una clase de 12 estudiantes se quieren hacer grupos de tres estudiantes para realizar un trabajo. ¿Cuántos grupos distintos se pueden hacer?

a) 1320
b) 660
c) 220

→ CALCULADORA → $\boxed{12}$ $\boxed{nCr}$ $\boxed{3}$ = $\boxed{220}$

→ FÓRMULA → $\binom{12}{3} = \frac{12!}{3! \cdot (9!)} = \frac{479001600}{6 \cdot 362880} = \boxed{220}$

$12! = 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdots 1$
$3! =$
$9! =$

PCE_Matemáticas II_Mayo 2019_ PROBLEMAS

Bloque 2 Problemas.

1- Primer problema

Dada la siguiente función: $f(x) = \dfrac{x2+3}{x+1}$

a) (0,25 puntos) Calcule el dominio y los puntos de continuidad.
b) (1 punto) Estudie si tiene asíntotas.
c) (0,5 puntos) Estudie el crecimiento y los extremos relativos.
d) (0,75 puntos) Haga un dibujo aproximado de la gráfica de **f**.

a) El Dominio de una función racional es: **R** ~ {lo que anula el denominador}

$x+1=0 \rightarrow x=-1$

- Dom $f(x) = \mathbb{R} \sim \{-1\}$

- Ptos continuidad $\rightarrow f(a) = \lim_{x\to a^+} = \lim_{x\to a^-}$

La función será continua en todo su Dominio excepto en el punto x= -1

b)

- $\boxed{AV}$: Las asíntotas verticales se encuentran en los puntos de No Dominio

$\exists AV$ en $x=-1$

- $\boxed{AH}$: Las asíntotas horizontales se encuentran en los límites laterales infinitos de la función

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \dfrac{x^2+3}{x+1} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)^{ind.} \xrightarrow{N^{\circ}>D^{\circ}} \boxed{\infty} \rightarrow \nexists AH$

$\lim_{x\to-\infty} \longrightarrow \boxed{-\infty}$

- $\boxed{A.O}$: $\boxed{y=mx+n}$ $\quad f(x) = \dfrac{x^2+3}{x+1}$

- m : $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{\frac{x^2+3}{x+1}}{x} = \lim \dfrac{1x^2+3}{1x^2+x} = \lim \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)^{ind.} \xrightarrow{N^{\circ}=D^{\circ}} \boxed{m=1}$

$\lim_{x\to-\infty} = \lim_{x\to+\infty}$ RAC.

- n : $\lim_{x\to+\infty} f(x) - mx = \dfrac{x^2+3}{(x+1)} - (x) = \lim \dfrac{\cancel{x^2}+3-\cancel{x^2}-x}{x+1} = \boxed{-1} = n$

$\exists$ A.O en $\boxed{y=x-1}$

c)

- $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x+1} \rightarrow \boxed{f'(x) = 0}$

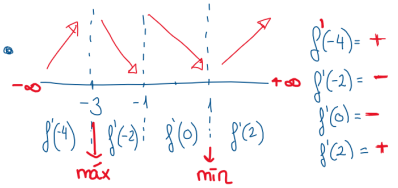
DIVISIÓN (Fracción)

$$y = \frac{u}{v} \rightarrow y' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x^2+2x-x^2-3}{(x+1)^2} = \boxed{\frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}}$$

$$f'(x) = \frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2} = 0 \rightarrow x^2+2x-3=0 \rightarrow \boxed{x=1},\ \boxed{x=-3}$$

pos. ptos rel.



$f'(-4) = +$
$f'(-2) = -$
$f'(0) = -$
$f'(2) = +$

$$\begin{cases} \text{crece } (-\infty,-3) \cup (1,+\infty) \\ \text{decrece } (-3,-1) \cup (-1,1) \end{cases}$$

Ptos relativos:

Mín $\rightarrow (1, f(x)) = (1,2)$
Máx $\rightarrow (-3, f(-3)) = (-3,-6)$

d)

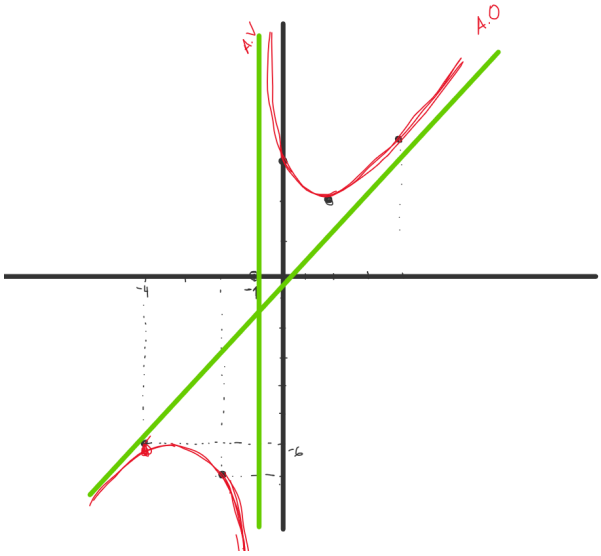
$y = f(x) = \dfrac{x^2+3}{x+1}$

T.V $\rightarrow$

X	-4	-2	0	2	4
y	-6'3	-7	3	2'3	3'8

A.O $\rightarrow \boxed{y = x-1} \rightarrow$

x	0	-1	1
y	-1	-2	0



ACADEMIA
La llibreta
Aprendiendo a aprender

2- Segundo problema.

Dado el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x & -y & & = 2 \\ ax & +y & +2z & = 0 \\ x & -y & +az & = 1 \end{cases}$$

a) (1,5 puntos) Determine cuántas soluciones tiene dicho sistema en función de los valores del parámetro ***a***.

b) (0,5 puntos) Resuelva el sistema para el valor ***a = -1***.

c) (0,5 puntos) Resuelva el sistema para el valor **a = 2**

a)

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} \overbrace{1 & -1 & 0}^{A} & 2 \\ a & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & a & 1 \end{array}\right)}_{A^*}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ a & 1 & 2 \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix} = a^2 + a = 0 \rightarrow a \begin{cases} \boxed{-1} \\ \boxed{0} \end{cases}$$

- $\boxed{\text{Cuando } a = -1}$

  - $|A|_{3\times3} = 0 \leftrightarrow rg(A) \leq 2$

    $|A|_{2\times2} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \longrightarrow rg(A) = 2$

  - $|A|^* = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow rg(A)^* \leq 2$

    $|A|^*_{2\times2} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow rg(A)^* = 2$ $\quad rg\,A^* \geq rg\,A$

Teorema Rouché

$\rightarrow \boxed{a = -1}$

$rg(A) = 2 = rg(A)^* \rightarrow$ SCI $\neq$ Nº incogn.

∞ sol.

- $\boxed{\text{Cuando } a = 0}$

  - $|A|_{3\times3} = 0 \leftrightarrow rg(A) \leq 2$

    $|A|_{2\times2} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \longrightarrow rg(A) = 2$

  - $|A|^*_{3\times3} = -1 \neq 0 \rightarrow rg(A)^* = 3$

$\rightarrow \boxed{a = 0}$

$rg(A) = 2 \neq rg(A)^* = 3 \rightarrow \boxed{\text{SI}}$

NO TIENE SOL

- Cuando $\boxed{a \neq -1 \ , \ a \neq 0}$

$|A| \neq 0 \leftrightarrow rg(A) = 3$

$rg A^* \geq rg A \leftrightarrow rg A^* = 3$

$rg A = rg A^* = 3 = N^{\circ}$ incog $\rightarrow$ SCD $\rightarrow$ 1 única sol $\begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases}$

$|A| = 0 \rightarrow$ Gauss $rg(A) = 2 = rg(A)^* \rightarrow$ SCI

b)

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 - F_3} \begin{array}{cccc} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & +1 & 1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 + F_2} \begin{array}{cccc} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & = N^{\circ} \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \end{array} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x - y = 2 \\ 2z = 2 \\ z = 1 \end{array}\right\} \rightarrow \boxed{\infty \text{ sol. } a = -1} \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 \end{cases}$$

c) $\boxed{a = 2}$

$|A| = 6$

Cramer

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{6} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{6} \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{6}$$

$\boxed{x = 1}$; $\boxed{y = -1}$; $\boxed{z = -1/2}$