PCE_Matemáticas II_Septiembre 2020_TEST

1. La distancia entre los planos $\pi_1 \equiv x + y + z = 1$ y $\pi_2 \equiv x + y + z = 3$ es:
   a) $2\sqrt{3}$
   b) 2
   c) $2/\sqrt{3}$

$\pi_1 // \pi_2$ por tanto:

$$d(\pi_1, \pi_2) = \frac{|D_2 - D_1|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{3-1}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\,u.$$

2. Las rectas $r: x - 1 = y + 1 = z - 2$ y $s: x + 2 = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{4}$:
   a) No se cortan en ningún punto
   b) Se cortan en un único punto
   c) Son coincidentes

$$\left.\begin{array}{ll} P_r = (1, -1, 2) & P_s = (-2, -2, 1) \\ \vec{v_r} = (1, 1, 1) & \vec{v_s} = (1, 2, 4) \end{array}\right\} \overrightarrow{P_rP_s} = (-3, 0, +2)$$

$$\frac{\vec{v_r}}{\vec{v_s}} \Rightarrow \frac{1}{1} \neq \frac{1}{2} \neq \frac{1}{4} \begin{cases} \text{cortan} \\ \text{ó} \\ \text{cruzan} \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ -3 & 0 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow \text{CRUZAN}$$

3. La recta r y el plano π dados por:

$$r: \frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-1}{2} \;\; y \;\; \pi \equiv x+y+z=1$$

a) Se cortan en un punto
b) La recta r está contenida en el plano π
c) No se cortan en ningún punto

$$\left.\begin{array}{l} P_r = (-1,-2,1) \\ \vec{v}_r = (2,-1,2) \\ \vec{n} = (1,1,1) \end{array}\right\} \vec{v}_r \cdot \vec{n} = 3 \neq 0 \rightarrow \text{SECANTES}$$

4. La ecuación del plano que pasa por los puntos P(1, 0, 0); Q(0, 1, 0) y R(0, 0 ,1) es:
a) $x+y+z=1$
b) $x+y-z=1$
c) $2x+y-2z=1$

$$\overrightarrow{PQ} = (-1,1,0)$$

$$\overrightarrow{PR} = (-1,0,1)$$

$$\pi = \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = x+y+z=1$$

5. El coseno del ángulo formado por los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$, siendo P(1, 0, 1); Q(2, 1, -1) y R(1, 2 ,1) es:
a) $1/3$
b) $-\sqrt{3}/6$
c) $\sqrt{6}/6$

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR}}{|\overrightarrow{PQ}| \cdot |\overrightarrow{PR}|} = \frac{\cancel{2}}{\sqrt{6} \cdot \cancel{2}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \approx \frac{\sqrt{6}}{6}$$

$$\overrightarrow{PQ} = (1,1,-2) \longrightarrow |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{6}$$

$$\overrightarrow{PR} = (0,2,0) \longrightarrow |\overrightarrow{PR}| = \sqrt{4} = 2$$

6. El área del paralelogramo formado por los vertices A(1, 1, 0); B(0, 2, 2); C(3, 3, 0) y D(2, 4 ,2) es:
   a) 8
   b) $2\sqrt{2}$
   c) $4\sqrt{3}$

$$A_p = |\vec{AB} \times \vec{AD}| = \sqrt{4^2+4^2+4^2} = 4\sqrt{3}$$

$$\vec{AB} \times \vec{AD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -4\vec{i} + 4\vec{j} - 4\vec{k}$$

7. La ecuación del plano que contiene a las rectas:

$$r: \frac{x+1}{2} = y = z+1 \;\; y \;\; s: \frac{x-5}{2} = y-4 = z$$

Es:
   a) $3x - 4y - 2z + 1 = 0$
   b) $x + 2y + 3z = 1$
   c) $x + 4y - z = 0$

$P_r = (-1, 0, -1)$ $\qquad P_s = (5, 4, 0)$

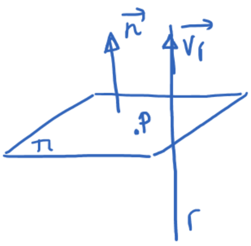
$\vec{v_r} = (2, 1, 1)$ $\qquad \vec{v_s} = (2, 1, 1)$

$\vec{v_r} \parallel \vec{v_s} \longrightarrow \vec{P_rP_s} = (6, 4, 1)$

$$\begin{vmatrix} x+1 & y & z+1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 6 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 3x - 4y - 2z + 1 = 0$$

8. La ecuación del plano que es ortogonal a la recta: $r:\begin{cases} x+y-z=2 \\ x-2y=0 \end{cases}$ y pasa por el punto P(1, 0, -1) es:

a) $x-3y+2z+1=0$
b) $2x+y+3z+1=0$
c) $3x+y+3=0$



$$P = (\overset{x}{1}, \overset{y}{0}, \overset{z}{-1})$$

$$\vec{v_r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \overset{A}{-2}\vec{i} \overset{B}{-}\vec{j} \overset{C}{-3}\vec{k} = \vec{n}$$

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

$$-2\cdot 1 + 0\cdot(-1) + (-1)\cdot(-3) + D = 0 \rightarrow D = -1$$

$$\pi = -2x - y - 3z - 1 = 0$$

9. El rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ es:

a) Uno
b) Dos
c) Tres

$$|A|_{3x3} = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$|A|_{2x2} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow rg(A) = 2$$

10. El conjunto de soluciones del sistema: $\begin{cases} 3x+y=1 \\ x-y+2z=-3 \end{cases}$ es:

a) $\{(\lambda, 1-3\lambda, -1-2\lambda) : \lambda \in R\}$
b) $\{(1-3\lambda, \lambda, -1-2\lambda) : \lambda \in R\}$
c) $\{(-1-2\lambda, 1-3\lambda, \lambda) : \lambda \in R\}$

$\cdot\ x=\lambda \rightarrow y=1-3\lambda$

$\cdot\ \lambda-(1-3\lambda)+2z=-3 \rightarrow z=-1-2\lambda$

$$\begin{cases} x=\lambda \\ y=1-3x=1-3\lambda \\ z=-1-2\lambda \end{cases} \quad \forall\lambda\in R$$

11. El Sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 3x+y-2z=1 \\ x-y+2z=-2 \\ 5x-y+2z=4 \end{cases}$$

a) Tiene una única solución
b) No tiene solución
c) Tiene infinitas soluciones

Discutimos el sistema usando el Teorema de Rouché-Frobenius:

$$|A|=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix}=0 \rightarrow rg\,A=2$$

$$|A^*|=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 5 & 1 & 4 \end{vmatrix}\neq 0 \rightarrow rg\,A^*=3$$

SI
$\nexists$ sol

12. Si la siguiente matriz $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ tiene como determinante -3, entonces el determinante de la matriz B dada por $B=\begin{pmatrix} b & c & a \\ e & f & d \\ h & i & g \end{pmatrix}$ es:

a) Det (B) = 3
b) Det (B) = -3
c) Det (B) = 9

Aplicando las propiedades de los determinantes tenemos:

$|A|=-3$

$$|B|=\begin{vmatrix} b & c & a \\ e & f & d \\ h & i & g \end{vmatrix}=(-1)\begin{vmatrix} c & b & a \\ f & e & d \\ i & h & g \end{vmatrix}=(-1)\cdot(-1)\cdot\underbrace{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}}_{|A|}=3$$

ACADEMIA La llibreta
www.academialallibreta.es
Gran vía Fernando el Católico 23
46008 Valencia

13. La inversa de la matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ es:

a) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$B^{-1} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Adj}B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Adj}B^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ |B| = 1 \end{array} \right\} \frac{\text{Adj}B^t}{|B|} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

14. Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ la matriz AB es:

a) $AB = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$

b) $AB = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$

c) $AB = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

$$A \times B = \begin{pmatrix} 2(-1)+0 & 4+0 \\ 0+3(-1) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

15. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, la suma de los elementos de la diagonal principal de la matriz *A + 2I*, siendo *I* la matriz identidad, es:

a) 5

b) 8

c) 2

$$\overbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}}^{A} + \overbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}^{2I} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow 4+1+3=8$$

PROBLEMAS MODELO 1

1. Dada la siguiente función:

$$f(x) = \frac{x-2}{x+3}$$

a) Describa el conjunto de puntos donde la función es continua.
b) Estudie si tiene asíntotas y en caso afirmativo calcule sus ecuaciones.
c) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función y en el caso de existir calcule los extremos relativos.
d) Haga un dibujo aproximado de la gráfica de *f*.

a)

La función no existe cuando el denominador se anula, es decir:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Dom } f(x) = \mathbb{R} \sim \{\text{NULO } D^{o}\} \\ x+3=0 \rightarrow x=-3 \end{array}\right\} \text{Dom } f(x) = \mathbb{R} \sim \{-3\}$$

b)

Estudiamos la existencia de asíntotas:

A.V $\Rightarrow$ $x=-3$ (en los ptos de No Dom)

A.H $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x-2}{x+3} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x-2}{x+3} = 1$

$\exists$ AH en $y=1$

A.O $\Rightarrow$ $\nexists$

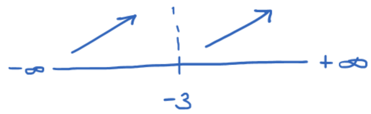
c)

Para estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento necesitamos igualar a cero la primera derivada:

$f'(x) = 0 \rightarrow$ Ptos rel.

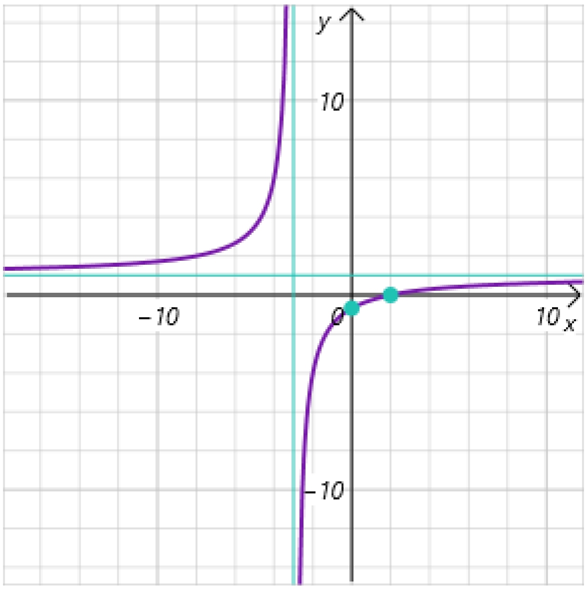
$f'(x) = \dfrac{5}{(x+3)^2} = 0 \rightarrow \nexists$ sol

No hay máx ni mín.



La función es creciente en todo su dominio.

d)



2. Calcule las siguientes integrales:

a) $\int \frac{-2x^3+3x+3}{x^2+1}\,dx$

b) $\int \frac{tg2\cdot x}{1+4x^2}\,dx$

c) $\int \frac{\cos x}{5+3sen\,x}\,dx$

a)

$$\int \frac{-2x^3+3x+3}{x^2+1}dx \to Integral\ racional\ impropia\ (grado\ P(x) > grado\ Q(x))$$

$$I = \int \frac{-2x^3+3x+3}{x^2+1}dx \to Efectuamos\ la\ división\ de\ polinomios:\ D = C\cdot d + R \to \frac{D}{d} = C + \frac{R}{d}$$

$$I = \int \frac{-2x^3+3x+3}{x^2+1}dx = \int \left[-2x + \left(\frac{5x+3}{x^2+1}\right)\right]dx = \int -2x\,dx + \int \frac{5x+3}{x^2+1}dx$$

$$I = \int -2x\,dx + \int \frac{5x+3}{x^2+1}dx = \int -2x\,dx + \int \frac{5x}{x^2+1}dx + \int \frac{3}{x^2+1}dx$$

$$I = \int -2x\,dx + \int \frac{5x}{x^2+1}dx + \int \frac{3}{x^2+1}dx = -2\int x\,dx + 5\cdot\frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2+1}dx + 3\int\frac{1}{x^2+1}dx$$

$$I = -2\int x\,dx + 5\cdot\frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2+1}dx + 3\int\frac{1}{x^2+1}dx = -x^2 + \frac{5}{2}Ln\,(x^2+1) + 3\,arctg(x) + C$$

Solución: $\boldsymbol{I = -x^2 + \frac{5}{2}Ln\,(x^2+1) + 3\,arctg(x) + C}$

b)

$$\int \frac{tg2\cdot x}{1+4x^2}dx = tg2\int\frac{x}{1+4x^2}dx = tg2\cdot\frac{1}{8}\int\frac{8x}{1+4x^2}dx = \frac{tg2}{8}\cdot Ln(1+4x^2) + C$$

Solución: $\boldsymbol{I = \frac{tg2}{8}\cdot Ln(1+4x^2) + C}$

c)

$$\int \frac{\cos x}{5+3\,senx}\,dx \rightarrow Realizamos\ un\ cambio\ de\ variable \begin{cases} u = sen\,x \\ du = \cos x\,dx \rightarrow dx = \dfrac{du}{\cos x} \end{cases}$$

$$I = \int \frac{\cos x}{5+3\,senx}\,dx = \int \frac{\cos x}{5+3u}\cdot\frac{du}{\cos x} = \int \frac{du}{5+3u} = \frac{1}{3}\int \frac{3\,du}{5+3u} = \frac{1}{3}Ln\,(5+3u)+C$$

$$Deshaciendo\ el\ cambio\ de\ variable: u = sen\,x \rightarrow I = \frac{1}{3}Ln\,(5+3\,senx)+C$$

Solución: $\boldsymbol{I = \frac{1}{3}\,Ln\,(5+3\,senx)+C}$

PROBLEMAS MODELO 2

1. Responda a las siguientes preguntas justificando las respuestas.

   a) Con los dígitos 0, 2, 4, 6 y 8 ¿cuántos números distintos de tres cifras, es decir entre 100 y 999, podemos formar?
   b) En una clase de 13 estudiantes se quiere un grupo de 4 estudiantes para realizar un trabajo, ¿cuántos grupos distintos se pueden hacer?
   c) ¿Cuántas palabras distintas de cuatro letras se pueden formar con las letras de la palabra "VIRTUAL" si las vocales tienen que estar en las posiciones pares y no se puede repetir ninguna letra?
   d) Se lanza una moneda que no está trucada tres veces. ¿Cuál es la probabilidad de sacar al menos dos caras?

a)

El orden de los elementos importa, no usamos todos los números ya que los podemos repetir.

$$VR_{m,n} = m^n \rightarrow VR_{5,3} = 5^3 = \mathbf{125}$$

Solución: Hay 125 posibles números de tres cifras que podemos formar con los dígitos 0, 2, 4, 6 y 8.

b)

El orden de los elementos no importa y no podemos coger a la misma persona dos veces.

$$C_{m,n} = \binom{m}{n} = \frac{m!}{n! \cdot (m-n)!} \rightarrow C_{13,4} = \binom{13}{4} = \frac{13!}{4! \cdot (13-4)!} = \frac{9! \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13}{4! \cdot 9!} = \frac{10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13}{4!}$$

$$C_{13,4} = \binom{13}{4} = \frac{10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \mathbf{715}$$

Solución: Hay 715 formas de elegir grupos formados por 4 alumnos escogidos de entre los 13 que hay en la clase.

c)

Debemos separar el número de formas de colocar las vocales en las posiciones pares en una palabra formada por cuatro letras, y el número de formas de colocar las consonantes en el resto de lugares que quedan.

En ambos casos se trata de variaciones sin repetición, ya que el orden de las letras importa, no las cogemos todas para formar la palabra de cuatro letras y no se pueden repetir.

$$V_{m,n} = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \dots \cdot (m-n+1) \begin{cases} Colocamos\ 2\ de\ las\ 3\ vocales\ en\ lugares\ par \rightarrow V_{3,2} \\ Colocamos\ 2\ de\ las\ 4\ vocales\ en\ otros\ lugares \rightarrow V_{4,2} \end{cases}$$

$$Vocales \rightarrow V_{3,2} = 3 \cdot (3-2+1) = 3 \cdot 2 = 6$$
$$Consonantes \rightarrow V_{4,2} = 4 \cdot (4-2+1) = 4 \cdot 3 = 12$$

Hay 6 palabras distintas de 4 letras que podemos formar con las vocales y 12 palabras distintas de 4 letras que podemos formar con las consonantes. Es decir, en total podemos formar: $Total = 6 \cdot 12 = \mathbf{72}$ palabras.

Solución: Se pueden construir 72 palabras con las condiciones mencionadas en el enunciado.

d)

El espacio muestral del experimento del enunciado es:

$$E = \{CCC, XCC, CXC, CCX, CXX, XCX, XXC, XXX\}$$

siendo:

$$C = Sacar\ cara\ al\ lanzar\ una\ moneda \rightarrow Éxito: p = P(C) = 1/2$$
$$R = Sacar\ cruz\ al\ lanzar\ una\ moneda \rightarrow Fracaso: q = P(R) = 1/2$$

Cuando p y q tienen las misma probabilidad, la variable de estudio X se distribuye siguiendo una distribución binomial: $\beta(n,p) = \left(3,\ \frac{1}{2}\right) \rightarrow n{:}\ nº\ de\ veces\ que\ se\ realiza\ el\ experimento$

$$X = Número\ de\ caras\ obtenidas\ al\ lanzar\ la\ moneda\ 3\ veces$$

Siendo la probabilidad de sacar al menos dos caras:

$$P(X \geq 2) = P(X=2) + P(X=3) = \left[\binom{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{3-2}\right] + \left[\binom{3}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{3-3}\right]$$

$$P(X \geq 2) = \left[\left(\frac{3!}{2! \cdot (3-2)!}\right) \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}\right] + \left[1 \cdot \frac{1}{8} \cdot 1\right] = \left[3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}\right] + \frac{1}{8} = \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} = \mathbf{0{,}5} = \mathbf{50}\%$$

Solución: La probabilidad de que salgan al menos dos caras al lanzar una moneda tres veces del 50 %

2. Los datos recogidos hasta el mes de Agosto indican que el 0,5 % de la población Española tiene o ha tenido el corona virus. Entre las personas infectadas el test modelo A da un resultado positivo en el 90 % de los casos, mientras que entre los no infectados da un resultado positivo en el 0,5 % de los casos.

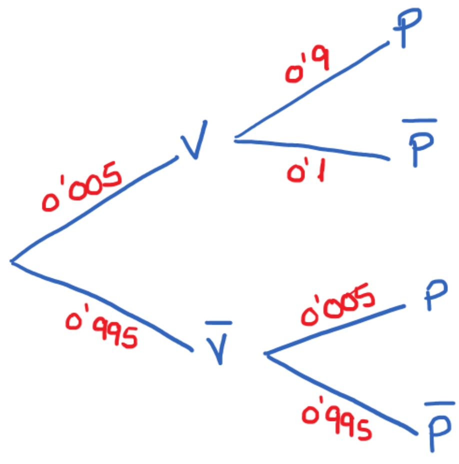
   a) Dibuja el diagrama en árbol.
   b) ¿Cuál es la probabilidad de que, escogida una persona al azar, de un resultado positivo?
   c) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona que ha dado negativo tenga o haya tenido el corona virus?

a)

Sucesos:

- Suceso V: Estar infectado de corona virus.
- Suceso NoV: No estar infectado de corona virus (suceso opuesto del suceso V).
- Suceso P: Dar positivo en el test de coronavirus.
- Suceso NoP: No dar positivo en el test de coronavirus (suceso opuesto del suceso P).

Elaboramos un diagrama en árbol:



b)

La probabilidad de que una persona escogida al azar de positivo es:

$$P(P) = P(V) \cdot P(P/V) + P(NV) \cdot P(P/NV) = 0{,}005 \cdot 0{,}9 + 0{,}995 \cdot 0{,}005 = 9{,}47 \cdot 10^{-3} \approx \mathbf{0{,}95\%}$$

Solución: Hay un 0,95 % de probabilidades de que la persona escogida al azar en España de positivo en corona virus.

c)

Dado que sabemos que la persona escogida ha dado negativo en el test, la probabilidad de que haya tenido o tenga el coronavirus es:

$$\textit{Teorema de Bayes} \rightarrow P(V/NP) = \frac{P(V \cap NP)}{P(NP)} = \frac{P(V) \cdot P(NP/V)}{P(NP)} = \frac{0{,}005 \cdot 0{,}1}{0{,}99} = 5{,}05 \cdot 10^{-4} = \mathbf{0{,}05}\ \%$$

$$P(NP) = 1 - P(P) = 1 - (9{,}47 \cdot 10^{-3}) = 0{,}99$$

Solución: Hay un 0,05 % de probabilidades de que una persona que ha dado negativo en el test haya tenido o tenga el coronavirus.