ACADEMIA La llibreta
www.academialallibreta.es
Gran vía Fernando el Católico 23
46008 Valencia

MATEMÁTICAS CCSS – MAYO 2021 PCE TEST

1. Una matriz A es diagonal si se cumple que:
   a) Todos los elementos de su diagonal principal son iguales
   b) Es cuadrada y los elementos no pertenecientes a la diagonal principal son todos iguales a 1
   c) Ninguna de las anteriores

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

2. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. El resultado de hacer B x A es:
   a) No es posible hacer B x A
   b) La matriz nula
   c) Ninguna de las otras

$$B \times A = \underset{\underline{\underline{2\times 3}}}{\begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}} \cdot \underset{\underline{\underline{3\times 2}}}{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}} = \underset{2\times 2}{\begin{pmatrix} \cancel{0}\cdot 1 + 2\cdot\cancel{0} - 4\cdot 2 & \cancel{0}\cdot 2 + 2\cdot\cancel{0} - 4\cdot 4 \\ \cancel{0}\cdot 1 - 1\cdot\cancel{0} + 2\cdot 2 & 0\cdot\cancel{2} - 1\cdot\cancel{0} + 2\cdot 4 \end{pmatrix}} = \underset{2\times 2}{\begin{pmatrix} -8 & -16 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}}$$

3. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, y sabiendo que el producto A x B es $C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, ¿cuál es el valor de x?
   a) x=2
   b) x=-2
   c) Ninguna de las otras

$$\boxed{A \times B = C}$$

$$\underset{\underline{\underline{2\times 3}}}{\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}} \cdot \underset{\underline{\underline{3\times 1}}}{\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}} = \underset{\underline{\underline{2\times 1}}}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix} 2\cdot x + 3\cdot 0 - 2\cdot 2 \\ -1\cdot x + 2\cdot 0 + 1\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2x - 4 \\ -x + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \longrightarrow 2x - 4 = 0 \longrightarrow 2x = 4 \longrightarrow \boxed{x = 2} \\ \longrightarrow -x + 2 = 0 \longrightarrow \boxed{x = 2} \end{array}$$

4. Dada la inecuación $-x+3y-3\geq 1$. Un punto solución es:
   a) (0,1)
   b) (1,0)
   c) Ninguna de las otras

Comprobamos si algún punto cumple la inecuación:

$(0,1) \rightarrow -0 + 3\cdot 1 - 3 \geq 1 \longrightarrow 0 \geq 1$ NO//

$(1,0) \rightarrow -1 + \underbrace{3\cdot 0}_{0} - 3 \geq 1 \longrightarrow -4 \geq 1$ NO//

5. ¿Cuál es el valor del siguiente límite $\lim\limits_{x\to 3^+} \frac{3}{x^2-9}$?
   a) $+\infty$
   b) El límite no existe
   c) Ninguna de las otras

Si se descompone el denominador será más fácil

$x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$ y así:

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{3}{\underbrace{(x-3)}_{0^+}\underbrace{(x+3)}_{6}} = \frac{3}{0^+} = \frac{K}{0^+} = \boxed{+\infty}$$

o se pueden dar valores directamente en el límite:

$$3 \qquad 3 \qquad 3 \qquad 3 \quad = \frac{K}{\ } = \boxed{+\infty}$$

o se pueden dar valores directamente en el límite:

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{3}{x^2-9} = \frac{3}{(3{,}01)^2-9} = \frac{3}{0{,}0601} = \frac{3}{0^+} = \frac{K}{0^+} = \boxed{+\infty}$$

6. La función $f(x) = \frac{x^3}{x^2+3}$ tiene:
   a) Asíntota oblicua
   b) Asíntota vertical
   c) Asíntota oblicua y asíntota vertical

A.V. → Buscamos dónde se anula el denominador

$x^2+3=0$
$\cancel{x^2=-3}$ NO tiene A.V.

A.O. → Como se trata de un cociente de polinomios, al ser el numerador un grado mayor que el denominador, tiene A.O. $y = mx+n$

donde $m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x^3+3x} = 1$

7. Dada la función $f(x) = \frac{x^3}{x^3+1}$, es:
   a) Decreciente en el intervalo $(0, +\infty)$
   b) Creciente en el intervalo $(0, +\infty)$
   c) Ninguna de las otras

Estudiamos el dominio de la función:

$x^3+1=0 \rightarrow x^3=-1 \rightarrow x = \sqrt[3]{-1} = -1$

Dom $f(x) = \mathbb{R} - \{-1\}$

$f = \frac{u}{v} \rightarrow f' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$ $\begin{cases} u = x^3 \\ u' = 3x^2 \\ v = x^3+1 \\ v' = 3x^2 \end{cases}$

Estudiamos crecimiento y decrecimiento haciendo $f'(x)=0$

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^3+1) - x^3 \cdot 3x^2}{(x^3+1)^2} = \frac{\cancel{3x^5} + 3x^2 - \cancel{3x^5}}{(x^3+1)^2}$$

$f'(x) = 0 \rightarrow \frac{3x^2}{(x^3+1)^2} = 0 \rightarrow 3x^2 = 0 \rightarrow \boxed{x=0}$ posible Máx/mín

$f'(-2)>0$; $f'(0{,}5)>0$; $f'(1)>0$ signo $f'(x)$

$\nearrow$ -1 $\nearrow$ 0 $\nearrow$

Crece: $(-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup \underline{(0, +\infty)}$

8. Hallar $\int (e^{4x} - \frac{e^x}{4})dx$
   a) $\frac{e^{4x}}{4} - e^x + C$
   b) $\frac{e^{4x}+e^x}{4} + C$
   c) Ninguna de las anteriores

Como se trata de una resta de integrales inmediatas: $\int f' \cdot e^f = e^f$

$$\int e^{4x}dx - \int \frac{e^x}{4}dx = \frac{1}{4}\int 4 \cdot e^{4x}dx - \frac{1}{4}\int e^x dx =$$

$$= \frac{1}{4} e^{4x} - \frac{1}{4} e^{x} + C = \frac{e^{4x} - e^{x}}{4} + C$$

9. Si P es una probabilidad definida sobre el espacio muestral E = {ω_1, ω_2, ω_3, ω_4}, con P (ω_1)=0,15, P (ω_2)=4 P (ω_4), P (ω_4)=3 P (ω_3), halla P (ω_3)
   a) 0,053125
   b) 0,6375
   c) Ninguna de las anteriores

$$P(\omega_1) + \underbrace{P(\omega_2)} + P(\omega_3) + \underbrace{P(\omega_4)} = 1 \longrightarrow \text{Sustituimos:}$$

$$0{,}15 + 4 \cdot \underbrace{P(\omega_4)} + P(\omega_3) + 3P(\omega_3) = 1$$

$$0{,}15 + 4 \cdot 3 \cdot P(\omega_3) + P(\omega_3) + 3P(\omega_3) = 1$$

$$0{,}15 + 12\, P(\omega_3) + P(\omega_3) + 3P(\omega_3) = 1 \longrightarrow \text{agrupamos:}$$

$$16\, P(\omega_3) = 1 - 0{,}15$$

$$\boxed{P(\omega_3) = \frac{0{,}85}{16} = 0{,}053125}$$

10. Si A y B son dos sucesos de un espacio muestral E con P(A/B) = $\frac{1}{2}$P(B/A), entonces:
   a) Siempre que ocurre B, ocurre A
   b) La probabilidad de B es el doble de la de A
   c) Ninguna de las otras

Como se trata de probabilidad condicionada:

$$\left.\begin{aligned} P(A/B) &= \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \\ P(B/A) &= \frac{P(B\cap A)}{P(A)} = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} \end{aligned}\right\}$$

Como $P(A/B) = \frac{1}{2} P(B/A)$, sustituyendo:

$$\frac{P(\cancel{A\cap B})}{P(B)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{P(\cancel{A\cap B})}{P(A)} \longrightarrow \boxed{P(B) = 2\,P(A)}$$

11. Si X es una variable aleatoria que sigue una distribución normal N(μ=3, σ=0,8), y se sabe que P (X≥a−1) = 0,1056 podemos afirmar que:
   a) a=1,5
   b) a=5
   c) Ninguna de las otras

$$X \longrightarrow N(3, 0.8)$$

Tipificando: $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \rightarrow N(0,1)$

$$P(X \geq a-1) = P\left(Z \geq \frac{(a-1)-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z \geq \frac{(a-1)-3}{0{,}8}\right) =$$

$$= P\left(Z \geq \frac{a-4}{0{,}8}\right) = 1 - \underbrace{P\left(Z \leq \frac{a-4}{0{,}8}\right)}_{\text{tiene que valer } 1-0{,}1056=0{,}8944} = 0{,}1056$$

Así: $P\left(Z \leq \underbrace{\frac{a-4}{0{,}8}}_{1{,}25}\right) = 0{,}8944 \longrightarrow$ Buscando en la tabla:

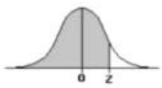

TABLA I (B)

DISTRIBUCIÓN NORMAL TIPIFICADA $N(0\,,1)$

La tabla proporciona, para cada valor de z, el área que queda a su izquierda.

z	0'00	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05	0'06	0'07	0'08	0'09
0'0	0'50000	0'50399	0'50798	0'51197	0'51595	0'51994	0'52392	0'52790	0'53188	0'53586
0'1	0'53983	0'54380	0'54766	0'55172	0'55567	0'55962	0'56356	0'56749	0'57142	0'57535
0'2	0'57926	0'58317	0'58706	0'59095	0'59483	0'59871	0'60257	0'60642	0'61026	0'61409
0'3	0'61791	0'62172	0'62552	0'62930	0'63307	0'63683	0'64058	0'64431	0'64803	0'65173
0'4	0'65554	0'65910	0'66276	0'66640	0'67003	0'67364	0'67724	0'68082	0'68439	0'68793
0'5	0'69146	0'69497	0'69847	0'70194	0'70450	0'70884	0'71226	0'71566	0'71904	0'72240
0'6	0'72575	0'72907	0'73237	0'73565	0'73891	0'74215	0'74537	0'74857	0'75175	0'75490
0'7	0'75804	0'76115	0'76424	0'76730	0'77035	0'77337	0'77637	0'77935	0'78230	0'78524
0'8	0'78814	0'79103	0'79389	0'79673	0'79955	0'80234	0'80511	0'80785	0'81075	0'81327
0'9	0'81594	0'81859	0'82121	0'82381	0'82639	0'82894	0'83147	0'83398	0'83646	0'83891
1'0	0'84134	0'84375	0'84614	0'84850	0'85083	0'85313	0'85543	0'85769	0'85993	0'86214
1'1	0'86433	0'86650	0'86864	0'87076	0'87286	0'87493	0'87698	0'87900	0'88100	0'88298
1'2	0'88493	0'88686	0'88877	0'89065	0'89251	0'89435	0'89617	0'89796	0'89973	0'90147
1'3	0'90320	0'90490	0'90658	0'90824	0'90988	0'91149	0'91308	0'91466	0'91621	0'91774
1'4	0'91924	0'92073	0'92220	0'92364	0'92507	0'92647	0'92786	0'92922	0'93056	0'93189
1'5	0'93319	0'93448	0'93574	0'93699	0'93822	0'93943	0'94062	0'94179	0'94295	0'94408
1'6	0'94520	0'94630	0'94738	0'94845	0'94950	0'95053	0'95154	0'95254	0'95352	0'95449
1'7	0'95543	0'95637	0'95728	0'95818	0'95907	0'95994	0'96080	0'96164	0'96246	0'96327
1'8	0'96407	0'96485	0'96562	0'96638	0'96712	0'96784	0'96856	0'96926	0'96995	0'97062
1'9	0'97128	0'97193	0'97257	0'97320	0'97381	0'97441	0'97500	0'97558	0'97615	0'97670
2'0	0'97725	0'97778	0'97831	0'97882	0'97932	0'97982	0'98030	0'98077	0'98124	0'98169
2'1	0'98214	0'98257	0'98300	0'98341	0'98382	0'98422	0'98461	0'98500	0'98537	0'98574
2'2	0'98610	0'98645	0'98679	0'98713	0'98745	0'98778	0'98809	0'98840	0'98870	0'98899

$$\frac{a-4}{0{,}8} = 1{,}25$$

$$a - 4 = 1$$

$$\boxed{a = 5}$$

12. El intervalo de confianza para la media muestral viene dada por IC=$(\bar{X} \pm Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$, podemos afirmar que el error máximo admisible viene dado por:

a) $E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

b) $E = Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma}{n}}$

c) $E = Z_{\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

ENUNCIADOS PROBLEMAS CCSS PCE 2021

PROBLEMA 1. Las ventas de un supermercado de refrescos y aperitivos durante junio, julio y agosto del año pasado están en la matriz A, y los precios de venta en euros están en la matriz B:

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Junio} & \text{Julio} & \text{Agosto} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1500 & 2600 & 3650 \\ 750 & 800 & 900 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{Refrescos} \\ \text{Aperitivos} \end{array} \qquad B = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{Refrescos} & \text{Aperitivos} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2{,}0 & 3{,}5 \\ 1{,}5 & 3{,}0 \\ 1{,}0 & 2{,}5 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{Junio} \\ \text{Julio} \\ \text{Agosto} \end{array}$$

a) Multiplicar las matrices para obtener los ingresos por la venta de refrescos en los tres meses. ¿Qué elemento de la matriz nos da esa información? ¿A cuánto ascienden los ingresos por la venta de aperitivos?
b) Multiplicar las matrices para obtener los ingresos de ventas totales por meses. ¿En qué mes se alcanzó el máximo de ingresos? ¿Qué elemento de la matriz nos da esa información?
c) ¿Cuánto fueron los ingresos totales en los 3 meses?

PROBLEMA 2. Encontrar la función cuya segunda derivada es $-12x$, y cuya gráfica presenta un mínimo en el punto $(-2,0)$.

PROBLEMA 3. Se dispone de un dado tetraédrico trucado con cuatro caras con puntuaciones: 1, 2, 3 y 4 de modo que $P(4)=4P(1)$, $P(3)=3P(1)$, $P(2)=2P(1)$, en donde $P(4)$ indica la probabilidad de obtener la puntuación 4, y así sucesivamente.
Se dispone también de dos urnas con las siguientes composiciones:
U1: 1 bola roja y 2 bolas verdes.
U2: 2 bolas rojas y 3 bolas verdes.
Se lanza el dado. Si sale número par extraemos una bola de la urna U1. Si sale impar extraemos una bola de la urna U2. Se pide:
a) Determinar las probabilidades de los sucesos elementales que se presentan al lanzar el dado de cuatro caras.
b) Se lanza el dado y a continuación extraemos una bola de la urna que corresponda. Halla la probabilidad de que sea de color verde.