CCSS_Septiembre 2021

1. La opuesta de la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ es

   a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ c) Ninguna de las otras.

2. Una matriz cuadrada A es antisimétrica si se cumple que:
   a) Los elementos de la diagonal son todos iguales a 0.
   b) Los elementos de la diagonal son todos iguales a 1.
   c) Ninguna de las otras.

3. La matriz identidad I cumple que:
   a) Los elementos no pertenecientes a la diagonal principal son todos iguales a 0.
   b) Todos los elementos de la diagonal principal son iguales a 0.
   c) Todas las respuestas son correctas.

4. Dada las matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$, el valor de A^{-1} es:

   a) $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ b) La matriz A no es invertible c) $\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

5. ¿Cuál es el valor del siguiente límite $\lim_{x \to -\infty} f(x)$, si se sabe que $f(x) = e^{-3x}$?

   a) $+\infty$ b) El límite no existe c) Ninguna de las otras.

6. La función $f(x) = \dfrac{3}{x-3}$ presenta una discontinuidad en el punto $x = 3$
   a) Inevitable de salto infinito.
   b) Discontinuidad evitable.
   c) Ninguna de las otras.

7. Dada la función $f(x) = \dfrac{x^3}{x^3 - 1}$, es:
   a) Creciente en el intervalo $(0, +\infty)$.
   b) Decreciente en el intervalo $(0, +\infty)$.
   c) Ninguna de las otras.

8. Hallar $\int \left(e^{3x} + \dfrac{1}{x^2} \right) dx$

   a) $\dfrac{xe^{3x} - 3}{3x} + C$ b) $\dfrac{e^{3x}}{3} + \ln(x) + C$ c) Ninguna de las otras.

9. Un dado octaédrico (de 8 caras) está trucado de forma que la probabilidad de cada cara es proporcional al cuadrado del número que aparece en ella. Si se lanza el dado, ¿cuál es la probabilidad de que salga un 1?

   a) $P = \dfrac{1}{204}$. b) $P = \dfrac{11}{204}$. c) Ninguna de las otras.

10. Sea X una variable aleatoria normal de media $\mu = 5$, desviación típica $\sigma = 1,2$ y llamamos Z a su variable tipificada, es decir, $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$. Al hallar $P(Z \leq -0,83)$ estamos hallando:

a) $P(X \leq 4,86)$ b) $P(X \leq 4)$ c) $P(X \geq 4,86)$

11. La desviación típica de los resultados de las distintas mediciones que se realizan para calcular la duración de un proceso es $\sigma = 0,5$. Entonces, el número de medidas que hay que realizar para que, con un 99% de confianza, el error de la estimación no exceda de $0,1$ es:

(Nota: en este caso $Z_{\alpha/2} = 2,575$).

a) $n = 96$ b) $n = 166$ c) $n = 68$.

12. Si X es una variable aleatoria que sigue una distribución $N(0,1)$, podemos afirmar:

a) $P(Z \geq 1,86) = 0,9686$ b) $P(Z \geq 1,86) = 0,0314$ c) Ninguna de las otras.

PARTE 2.- PROBLEMAS

1. Tres atletas van a comprar. La primera compra 4 botellas de agua, 3 botellas de té con limón y 3 botellas de bebida isotónica. La segunda compra 8 botellas de agua, 2 botellas de té con limón y 2 botellas de bebida isotónica. La tercera compra 5 botellas de agua, 4 botellas de té con limón y 2 botellas de bebida isotónica. Al pagar comprueban que cada una ha pagado 8€. Calcular el precio de cada bebida.

   NOTA: Usar Gauss o cálculo matricial en la resolución del problema.

2. Una farmacéutica tiene las siguientes funciones de ingresos y gastos, en euros, y dónde x es la cantidad de unidades vendidas

$$I(x) = 6x^4 + 14x^2 + 1600x$$

$$G(x) = 6x^4 + 6x^2 + 16000x + 1520000$$

Determine:

a) La función que define el beneficio anual en euros. ¿Cuándo el beneficio es nulo?

b) Número de unidades vendidas que hace mínima la función de beneficio.

c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento del beneficio.

3. Una empresa de trabajo temporal dispone de una oferta de 1500 puestos base, 900 puestos técnicos y 600 puestos para especialistas. Se sabe que el 1,5% de la oferta depuestos base, el 2% de los técnicos y el 4% de los especialistas no pertenecen a la Unión Europea. Si se elige una oferta al azar,

a) ¿Cuál es la probabilidad de que no pertenezca a la Unión Europea?

b) Sabiendo que el puesto elegido no pertenece a la Unión Europea ¿cuál es la probabilidad de que sea un técnico?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que sea un experto si sabemos que trabaja en la Unión Europea?

¿especialista?

1. La **matriz opuesta** a otra **matriz** es la que tiene todos los elementos de signo contrario a la **matriz** original. Se deben multiplicar por −1 todos los elementos de la matriz.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow -A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -3 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

c) Ninguna de las otras.

2. Una **matriz antisimétrica** es una **matriz cuadrada** donde los elementos fuera de la diagonal principal son simétricamente iguales pero los que están por debajo de la diagonal principal llevan un signo negativo. Por otra parte, también es antisimétrica si es igual al opuesto de su traspuesta.

c) Ninguna de las otras.

3. Es una matriz escalar cuyos términos de la diagonal principal son iguales a la unidad (unos, 1) y el resto son todo ceros. Siempre se llama I.

a) Los elementos no pertenecientes a la diagonal son todo ceros.

4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$ $\qquad A^{-1} = \dfrac{\text{Adj}A^t}{|A|}$

$|A| = -4-(-4) = 0 \rightarrow$ si $|A| = 0 \rightarrow$ No existe inversa

b) La matriz A no es invertible

5. $$\lim_{x \to -\infty} e^{-3x} = e^{-3\cdot(-\infty)} = e^{+\infty} = +\boxed{\infty}$$

6. $f(x) = \dfrac{3}{x-3}$ en $x=3$ $\qquad$ CONTINUIDAD $\rightarrow \left[f(a) = \lim_{x \to a} \right]$

- Una función es continua en todo su dominio:

  $\text{Dom } f(x) = \mathbb{R} \sim \{3\}$ $\rightarrow$ en $x=3$ hay una asíntota vertical

- $\lim_{x \to 3} \dfrac{3}{3-3} = \dfrac{3}{0} = \infty \rightarrow$ No existe límite en $x=3$.

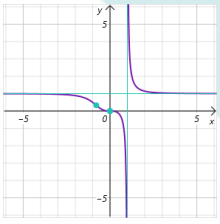
La función es discontinua inevitable de salto infinito. a)

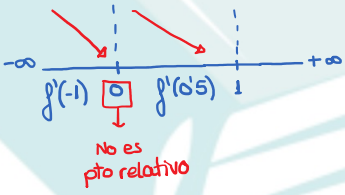
7

$$f(x) = \frac{x^3}{x^3-1} \qquad \text{Dom } f(x) = \mathbb{R} \sim \{1\}$$

$$f'(x) = \frac{3x^2 \cdot (x^3-1) - (x^3 \cdot 3x^2)}{(x^3-1)^2} = \frac{\cancel{3x^5} - 3x^2 - \cancel{3x^5}}{(x^3-1)^2} = \boxed{\frac{-3x^2}{(x^3-1)^2}}$$

$$f'(x) = 0 \longrightarrow \frac{-3x^2}{(x^3-1)^2} = 0 \longrightarrow -3x^2 = 0 \longrightarrow \boxed{x = 0}$$





La $f(x)$ es decreciente en todo su dominio:

$(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

c) Ninguna de las otras

8

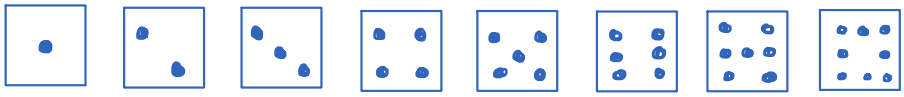
$$\int e^{3x} + \frac{1}{x^2}\, dx = \int e^{3x}\, dx + \int \frac{1}{x^2}\, dx$$

$$= \frac{1}{3}\int \underbrace{e^{3x}}_{e^u} \cdot \underbrace{3}_{u'}\, dx + \int \underbrace{x^{-2}}_{u^n}\, dx = \frac{1}{3}e^{3x} - \frac{x^{-1}}{1} + C$$

$$= \frac{e^{3x}}{3} - \frac{1}{x} + C = \frac{x \cdot e^{3x}}{3x} - \frac{3}{3x} = \boxed{\frac{xe^{3x} - 3}{3x} + C} \quad \text{opc a)}$$

9

Un dado octaédrico (de 8 caras) está trucado de forma que la probabilidad de cada cara proporcional al cuadrado del número que aparece en ella. Si se lanza el dado, ¿cuál es la probabilidad de que salga un 1?



P(1) P(2) P(3) P(4) P(5) P(6) P(7) P(8)

→ Probabilidad proporcional al cuadrado de cada cara:

$P(1) = 1^2 = 1$ $P(3) = 3^2 = 9$ $P(5) = 5^2 = 25$ $P(7) = 7^2 = 49$

$P(2) = 2^2 = 4$ $P(4) = 4^2 = 16$ $P(6) = 6^2 = 36$ $P(8) = 8^2 = 64$

→ ¿Prob. de que salga 1? → LAPLACE = $\frac{\text{casos favorables}}{\text{Casos totales}}$

$$P(1) = \frac{1}{1+1+9+16+25+36+49+64} = \frac{1}{204}$$ opc. a)

(10) Distribución normal, $\mu = 5$, $\sigma = 1'2$. $P(z \leq -0'83) \rightarrow$ ¿$P(x)$?

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma} \rightarrow -0'83 = \frac{x-5}{1'2} \rightarrow x = (-0'83 \cdot 1'2) + 5 = \boxed{4'004}$$

$P(x \leq 4) \rightarrow$ opc b)

(11) $\sigma = 0'5$; $nc = 99\%$; $\varepsilon = 0'1$; $z_{\alpha/2} = 2'575$

¿n?

$$\underset{\text{error}}{\varepsilon} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \rightarrow 0'1 = 2'575 \cdot \frac{0'5}{\sqrt{n}}$$

$$\sqrt{n} = \frac{2'575 \cdot 0'5}{0'1} \rightarrow (\sqrt{n})^2 = (12'875)^2 \rightarrow \boxed{n = 165'76}$$

opc b) n = 166

(12) Tenemos que mirar en la tabla de tipificación N(0,1) donde $z \leq$ Nº POSITIVO.

$$P(z \geq 1'86) = 1 - P(z \leq 1'86) = 1 - 0'9686 = \boxed{0'0314}$$ opc. b)

signo cambiado.
Calculamos el contrario.

P1

x = "Precio botella agua"

y = "Precio botella té limón"

z = "Precio botella isotónica"

	x agua	y limón	z isotónica		
Primera	4	3	3	= 8€	$\rightarrow 4x+3y+3z=8$
Segunda	8	2	2	= 8€	$\rightarrow 8x+2y+2z=8$
Tercera	5	4	2	= 8€	$\rightarrow 5x+4y+2z=8$

$$A=\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 3 & 8 \\ 8 & 2 & 2 & 8 \\ 5 & 4 & 2 & 8 \end{array}\right) \rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 8 & 2 & 2 \\ 5 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 32 \neq 0 \rightarrow \text{cramer}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 3 & 3 \\ 8 & 2 & 2 \\ 8 & 4 & 2 \end{vmatrix}}{32} = \frac{16}{32} = \boxed{\frac{1}{2}} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 8 & 3 \\ 8 & 8 & 2 \\ 5 & 8 & 2 \end{vmatrix}}{32} = \frac{24}{32} = \boxed{\frac{3}{4}} \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 3 & 8 \\ 8 & 2 & 8 \\ 5 & 4 & 8 \end{vmatrix}}{32} = \frac{40}{32} = \boxed{\frac{5}{4}}$$

solución: La botella de agua (x) cuesta 0'5 €

La botella de té limón (y) cuesta 0'75€

La botella isotónica (z) cuesta 1'25€

P.2

Ingresos $\rightarrow I(x) = 6x^4 + 14x^2 + 1600x$ (€)

Gastos $\rightarrow G(x) = 6x^4 + 6x^2 + 16000x + 1.520.000$ (€)

x = unidades vendidas

a) Beneficio? $\boxed{B(x) = I(x) - G(x)}$

$$B(x) = \cancel{6x^4} + 14x^2 + 1600x - \cancel{6x^4} - 6x^2 - 16000x - 1520000$$

$$B(x) = 8x^2 - 14400x - 1520000 \quad (€)$$

¿Cuándo es nulo? $\rightarrow B(x) = 0$

$$8x^2 - 14400x - 1520000 = 0$$

$$x = \frac{14400 \pm \sqrt{14400^2 - 4 \cdot 8 \cdot (-1520000)}}{2 \cdot 8}$$

$x_1 = 1900$

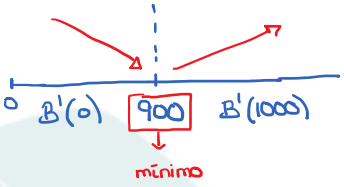
$x_2 = \cancel{-100} \rightarrow$ No pueden existir unidades negativas.

El beneficio será nulo cuando se vendan 1900 unidades.

b) Los máx y mín. se encuentran en $B'(x) = 0$

$$B(x) = 8x^2 - 14400x - 1520000$$

$$B'(x) = 16x - 14400 = 0 \rightarrow x = \frac{14400}{16} = 900$$



El beneficio será mínimo cuando se vendan 900 uds.

c) La función decrece de $(0, 900)$

La función crece de $(900, 1900) \cup (1900, +\infty)$

NOTA: No tenemos en cuenta $x < 0$ porque no podemos comprar cosas negativas.

Tenemos en cuenta $x = 1900$ porque en ese valor no hay beneficio $(B = 0)$ y, por tanto, no hay crecimiento.

P3

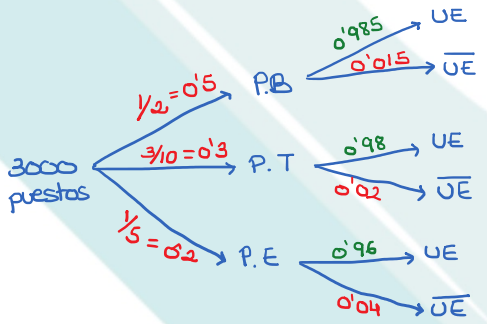
PB = "Puestos Base"

P.T = "Puestos técnicos"

P.E = "Puestos especialistas"

UE = Pertenecen a Unión Europea

$\overline{UE}$ = No pertenecen UE.



a) Probabilidad TOTAL:

$$P(\overline{UE}) = P(PB \cap \overline{UE}) \cup P(PT \cap \overline{UE}) \cup P(PE \cap \overline{UE})$$

$$= (0'5 \cdot 0'015) + (0'3 \cdot 0'02) + (0'2 \cdot 0'04)$$

$$= \frac{3}{400} + \frac{3}{500} + \frac{1}{125}$$

$$= \boxed{\frac{43}{2000}} = 0'0215 \rightsquigarrow 2'15\%$$

b) Teorema Bayes

$$P(PT/\overline{UE}) = \frac{P(\overline{UE} \cap PT)}{P(\overline{UE})} = \frac{0'3 \cdot 0'02}{0'0215} = \boxed{\frac{12}{43}} = 0'28 \rightsquigarrow 28\%$$

c) Nota: en el enunciado preguntan por expertos (palabra que no han nombrado con anterioridad). Entendemos que hace referencia a los especialistas.

Probabilidad condicionada $\rightarrow P(PE/UE) = \dfrac{P(PE \cap UE)}{P(UE)}$

$$P(PE/UE) = \frac{0'2 \cdot 0'96}{(0'2 \cdot 0'96) + (0'3 \cdot 0'98) + (0'5 \cdot 0'985)} = \frac{0'192}{0'192 + 0'294 + 0'4925}$$

$$= \boxed{\frac{384}{1957}} = 0'196 \rightsquigarrow 19'6\%$$