El examen consta de cinco preguntas. Cada pregunta tiene una valoración de 2 puntos. Las tres primeras preguntas son obligatorias, mientras que en las dos últimas se deberá elegir entre Opción 1 y Opción 2, respondiendo únicamente a una de las dos.

El/la estudiante debe indicar claramente, en la primera página del tríptico, cuáles han sido las opciones elegidas en las preguntas 4 y 5. (Si no se indica, y se han respondido dos opciones de una misma pregunta, sólo se corregirá la opción que aparezca en primer lugar en el tríptico).

Justifica los pasos realizados para llegar a la solución obtenida.

MODELO ORIENTATIVO DE EXAMEN

1. *(2 puntos)* El gobierno de una comunidad autónoma quiere incentivar el ahorro de agua en los hogares de dicha comunidad. Para ello, piensa subir las tasas de consumo de agua a aquellos hogares que más consumen por persona y bajar las tasas a los que menos consumen por persona. En concreto, planifica subir las tasas al 20 % de los hogares de la comunidad y bajarlas a otro 20 %.

El Departamento correspondiente ha comprobado que el consumo diario de agua por persona en los hogares de la comunidad se aproxima bien por una normal de media 135 litros. Además, los hogares a los que van a subir las tasas (correspondientes al 20 % de mayor consumo) tienen un consumo superior a los 148,44 litros por persona y día.

¿Cómo será el consumo de agua de los hogares a los que van a bajar las tasas?

Algunos valores de la función de distribución normal estándar $N(0,1)$ son: $P(Z \leq 0{,}25) = 0{,}5987$; $P(Z \leq 0{,}8) = 0{,}7881$; $P(Z \leq 0{,}84) = 0{,}7995$; $P(Z \leq 1{,}09) = 0{,}8621$. Usa el valor más cercano a lo que necesites en cada caso.

2. Responde justificadamente los siguientes apartados:

a) *(1 punto)* Calcula el área comprendida entre las gráficas de las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = |x|$.

b) *(0,5 puntos)* Razona, sin calcular la integral, si $\int_1^2 xe^x\,dx$ tiene signo positivo o negativo.

c) *(0,5 puntos)* Calcula la integral $\int_1^2 xe^x\,dx$.

3. Una fábrica de productos químicos produce 3 fármacos diferentes. Anualmente, esta fábrica tiene 4 clientes que, durante el mes de febrero, realizaron pedidos y/o devoluciones. Dichos datos (en miles de unidades) se han recogido en la siguiente matriz

$$\begin{pmatrix} -1 & 6 & 7 \\ 0 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 9 & 5 \end{pmatrix}.$$

a) *(0,5 puntos)* Indica qué representan las filas y las columnas, y especifica cuáles son las compras que ha hecho cada cliente durante el mes de febrero.

b) *(1,5 puntos)* Sabiendo que el primer cliente ha gastado un total de 2800€, el segundo un total de 2850€ y el cuarto un total de 3250€, ¿cuál es el precio por unidad de cada fármaco?

4. Elige entre 4.1 y 4.2, respondiendo únicamente uno de los dos.

4.1 Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función dada por $f(x) = \text{arctg}(x + \pi)$, donde arctg denota la función arcotangente.

a) *(1 punto)* Determina los intervalos de concavidad y de convexidad de f. Estudia y halla, si existen, los puntos de inflexión de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

b) *(1 punto)* Calcula $\lim_{x \to -\pi} \dfrac{f(x)}{\text{sen}(x)}$. ¿Cuál sería el valor del límite si cambiamos en el denominador $\text{sen}(x)$ por $g(x)$, siendo $g(x) = \text{sen}(x)$ si $x \neq -\pi$ y $g(-\pi) = 2$?

4.2 Sea $f(x) = x^3 - 4x + e^{(x-1)^2}$.

a) *(1,5 puntos)* Demuestra que existe un punto en $[0, 2]$ donde la derivada de $f(x)$ se anula.

b) *(0,5 puntos)* Justifica que el punto anterior es un extremo relativo de $f(x)$. ¿Será máximo o será mínimo?

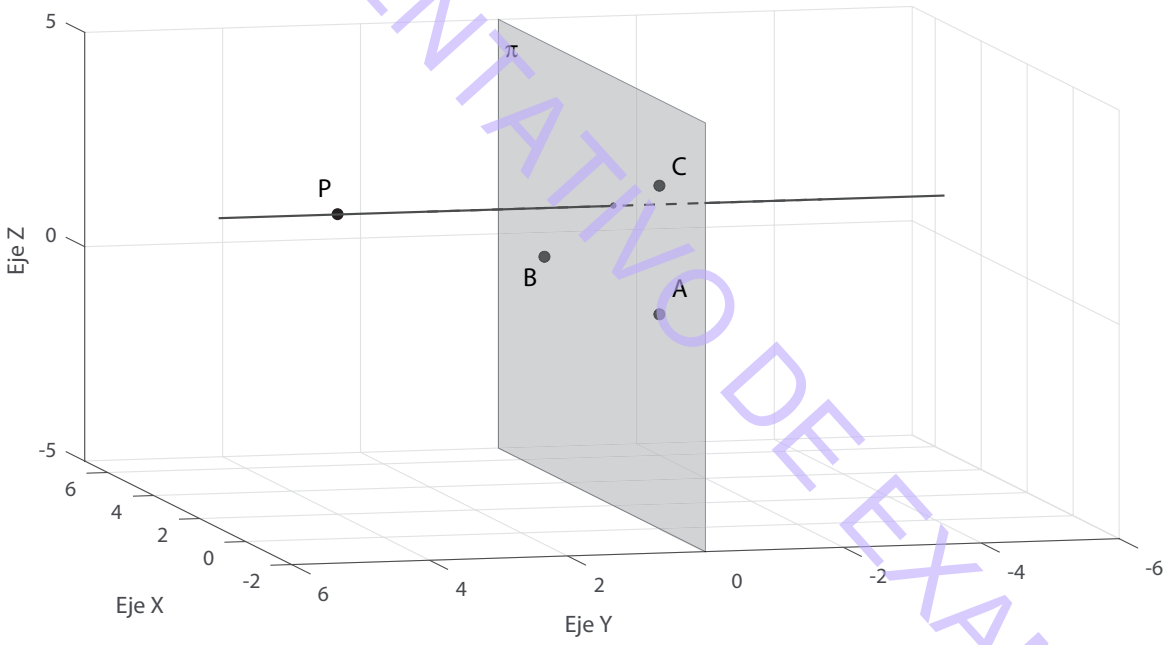
5. Elige entre 5.1 y 5.2, respondiendo únicamente uno de los dos.

5.1 *(2 puntos)* Sean u y v dos vectores no nulos de $\mathbb{R}^3$ perpendiculares entre sí y $w = u \times v$ su producto vectorial. Se definen $a = (u \times v) + w$, $b = v \times (v \times w)$ y $c = u \cdot (v \times w)$. Indica si a, b y c son vectores o escalares (números). Para aquellos que sean vectores, justifica si son paralelos a alguno de los vectores u, v y w.

5.2 Sea π el plano que pasa por los puntos $A(0, 0, 0)$, $B(5, 0, 0)$ y $C(0, 0, 3)$.

a) *(1 punto)* Calcula la recta perpendicular a π que pasa por el punto $P(2, 4, 2)$.

b) *(1 punto)* Calcula la distancia del punto P al plano π.



MODELO ORIENTATIVO DE EXAMEN

Fórmulas trigonométricas

(Nota: todos los ángulos del formulario están en radianes)

$\alpha =$	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\operatorname{sen}(\alpha) =$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos(\alpha) =$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0

- $\operatorname{sen}^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$.
- $\tan(\alpha) = \operatorname{sen}(\alpha)/\cos(\alpha)$.
- $\operatorname{sen}(A+B) = \operatorname{sen}(A)\cos(B) + \cos(A)\operatorname{sen}(B)$.
- $\cos(A+B) = \cos(A)\cos(B) - \operatorname{sen}(A)\operatorname{sen}(B)$.
- $\operatorname{sen}(A) + \operatorname{sen}(B) = 2\operatorname{sen}(\frac{A+B}{2})\cos(\frac{A-B}{2})$.
- $\cos(A) + \cos(B) = 2\cos(\frac{A+B}{2})\cos(\frac{A-B}{2})$.
- $\cos(A) - \cos(B) = -2\operatorname{sen}(\frac{A+B}{2})\operatorname{sen}(\frac{A-B}{2})$.

Teoremas sobre continuidad y derivabilidad

⋆ **Teorema de Bolzano.** Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua en $[a,b]$ y $f(a)f(b) < 0$, existe $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = 0$.

⋆ **Teorema de Rolle.** Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b). Si $f(a) = f(b)$, existe $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = 0$.

⋆ **Teorema del valor medio.** Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b). Existe $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = \dfrac{f(b) \quad f(a)}{b-a}$.

Integrales

⋆ **Volumen de un sólido de revolución** generado por la gráfica de $f(x)$ (entre $x = a$ y $x = b$) al girar en torno al eje OX: $\quad V = \pi \displaystyle\int_a^b f(x)^2 dx$.

Geometría

⋆ $\cos(\widehat{\overrightarrow{u}\ \overrightarrow{v}}) = \dfrac{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}}{|\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{v}|}$. ⋆ $\operatorname{sen}(\widehat{\overrightarrow{u}\ \overrightarrow{v}}) = \dfrac{|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}|}{|\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{v}|}$.

⋆ **Longitud de un arco de circunferencia:** $\alpha\, r$ (con α el ángulo central y r el radio de la circunferencia).
⋆ **Área de un sector circular:** $\frac{\alpha\, r^2}{2}$ (con α el ángulo central y r el radio de la circunferencia).
⋆ **Área del paralelogramo ABCD:** $|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}|$.
⋆ **Área del triángulo ABC:** $\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$.
⋆ **Área lateral de un cono:** $\pi\, r\, g$ (con r el radio de la base, y g la generatriz).
⋆ **Área de una superficie esférica:** $4\pi r^2$ (con r el radio de la esfera).
⋆ **Volumen de un prisma (o de un cilindro):** *Área de la base* $\times$ *Altura*.
⋆ **Volumen de una pirámide (o de un cono):** $\frac{1}{3} \times$ *Área de la base* $\times$ *Altura*.
⋆ **Volumen de una esfera:** $\frac{4}{3}\pi r^3$ (con r el radio de la esfera).
⋆ **Volumen del paralelepípedo definido por tres vectores** $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$**:** $|[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]|$.
⋆ **Volumen del tetraedro definido por tres vectores** $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$**:** $\frac{1}{6}|[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]|$.

Probabilidad

⋆ $\binom{m}{n} = \dfrac{m!}{(m-n)!n!}$.

⋆ La probabilidad de tener x éxitos en n pruebas repetidas en una distribución, X, binomial $B(n,p)$ es:
$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$.

⋆ **Aproximación de la binomial a la normal.** Si una distribución binomial $B(n,p)$ puede aproximarse por una distribucion normal $N(\mu, \sigma)$, entonces $\mu = np$ y $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$.

MODELO ORIENTATIVO DE EXAMEN