

**PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT**
**PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD**

<b>CONVOCATÒRIA: JUNY 2010</b>	<b>CONVOCATORIA: JUNIO 2010</b>
<b>MATEMÀTIQUES II</b>	<b>MATEMÁTICAS II</b>

**BAREM DE L'EXAMEN:** Cal elegir sols UNA de les dues OPCIONS, A o B, i s'han de fer els tres problemes d'aquesta opció.

Cada problema puntua fins a 10 punts.

La qualificació de l'exercici és la suma de les qualificacions de cada problema dividida entre 3, i aproximada a les centèsimes.

Cada estudiant pot disposar d'una calculadora científica o gràfica. Se'n prohibeix la utilització indeguda (guardar fórmules o text en memòria).

S'use o no la calculadora, els resultats analítics i gràfics han d'estar sempre degudament justificats.

**BAREMO DEL EXAMEN:** Se elegirá solo UNA de las dos OPCIONES, A o B, y se han de hacer los tres problemas de esa opción.

Cada problema se puntuará hasta 10 puntos.

La calificación del ejercicio será la suma de las calificaciones de cada problema dividida entre 3 y aproximada a las centésimas.

Cada estudiante podrá disponer de una calculadora científica o gráfica. Se prohíbe su utilización indebida (guardar fórmulas o texto en memoria).

Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.

## OPCIÓ A

**Problema A.1.** Donades les matrius quadrades

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & -2 \end{pmatrix},$$

es demana:

- a) Calcular les matrius  $(A - I)^2$  i  $A(A - 2I)$ . (4 punts).
- b) Justificar raonadament que
  - b.1) Existeixen les matrius inverses de les matrius  $A$  i  $A - 2I$ . (2 punts).
  - b.2) No existeix matriu inversa de la matriu  $A - I$ . (2 punts).
- c) Determinar el valor del paràmetre real  $\lambda$  per al qual es verifica  $A^{-1} = \lambda(A - 2I)$ . (2 punts).

**Problema A.2.** Donades les rectes d'equacions

$$r = \begin{cases} 5x + y - z = 4 \\ 2x - 2y - z = -5 \end{cases} \quad \text{i} \quad s = \begin{cases} x - y = -5 \\ z = 4 \end{cases},$$

es demana:

- a) Justificar que les rectes  $r$  i  $s$  es creuen. (4 punts).
- b) Calcular raonadament la distància entre les rectes  $r$  i  $s$ . (3 punts).
- c) Determinar l'equació del pla  $\pi$  que és paral·lel i equidistant a les rectes  $r$  i  $s$ . (3 punts).

**Problema A.3.** Es vol construir un estadi tancat de 10.000 metres quadrats de superfície. L'estadi està format per un rectangle de base  $x$  i dos semicercles exteriors de diàmetre  $x$ , de manera que cada costat horitzontal del rectangle és diàmetre d'un dels semicercles. El preu d'un metre de tanca per als costats verticals del rectangle és d'1 euro i el preu d'un metre de tanca per a les semicircumferències és de 2 euros. Es demana obtindre raonadament:

- a) La longitud del perímetre del camp en funció de  $x$ . (3 punts).
- b) El cost  $f(x)$  de la tanca en funció de  $x$ . (3 punts).
- c) El valor de  $x$  per tal que el cost de la tanca siga mínim. (4 punts).

## OPCIÓ B

**Problema B.1.** Donat el sistema d'equacions lineals que depèn dels paràmetres  $a$ ,  $b$  i  $c$

$$\begin{cases} 2ax + by + z = 3c \\ 3x - 2by - 2cz = a \\ 5ax - 2y + cz = -4b \end{cases},$$

es demana:

- Justificar raonadament que per als valors dels paràmetres  $a=0$ ,  $b=-1$  i  $c=2$  el sistema és incompatible. (3 punts).
- Determinar raonadament els valors dels paràmetres  $a$ ,  $b$  i  $c$ , per als quals es verifica que  $(x, y, z) = (1, 2, 3)$  és solució del sistema. (4 punts).
- Justificar si la solució  $(x, y, z) = (1, 2, 3)$  del sistema de l'apartat b) és, o no, única. (3 punts).

**Problema B.2.** Siga  $r$  la recta de vector director  $(2, -1, 1)$  que passa pel punt  $P = (0, 3, -1)$ . Es demana:

- Obtindre raonadament la distància del punt  $A = (0, 1, 0)$  a la recta  $r$ . (4 punts).
- Calcular raonadament l'angle que forma la recta que passa pels punts  $P$  i  $A$  amb la recta  $r$  en el punt  $P$ . (4 punts).
- Si  $Q$  és el punt on la recta  $r$  talla el pla d'equació  $z = 0$ , comprovar que el triangle de vèrtexs  $APQ$  té angles iguals en els vèrtexs  $P$  i  $Q$ . (2 punts).

**Problema B.3.** Donada la funció polinòmica  $f(x) = 4 - x^2$ , es demana obtenir raonadament:

- El gràfic de la corba  $y = 4 - x^2$ . (2 punts).
- El punt  $P$  de la corba la tangent de la qual és perpendicular a la recta d'equació  $x + y = 0$ . (3 punts).
- Les rectes que passen pel punt  $(-2, 1)$  i són tangents a la corba  $y = 4 - x^2$ , i obtenir els punts de tangència. (5 punts).

**BAREM DE L'EXAMEN:** Cal elegir sols UNA de les dues OPCIONS, A o B, i s'han de fer els tres problemes d'aquesta opció.

Cada problema puntua fins a 10 punts.

La qualificació de l'exercici és la suma de les qualificacions de cada problema dividida entre 3, i aproximada a les centèsimes.

Cada estudiant pot disposar d'una calculadora científica o gràfica. Se'n prohibeix la utilització indeguda (guardar fórmules o text en memòria).

S'use o no la calculadora, els resultats analítics i gràfics han d'estar sempre degudament justificats.

**BAREMO DEL EXAMEN:** Se elegirá solo UNA de las dos OPCIONES, A o B, y se han de hacer los tres problemas de esa opción.

Cada problema se puntuará hasta 10 puntos.

La calificación del ejercicio será la suma de las calificaciones de cada problema dividida entre 3 y aproximada a las centésimas.

Cada estudiante podrá disponer de una calculadora científica o gráfica. Se prohíbe su utilización indebida (guardar fórmulas o texto en memoria).

Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.

## OPCIÓN A

**Problema A.1.** Dadas las matrices cuadradas

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & -2 \end{pmatrix},$$

se pide:

- Calcular las matrices  $(A-I)^2$  y  $A(A-2I)$ . (4 puntos).
- Justificar razonadamente que
  - Existen las matrices inversas de las matrices  $A$  y  $A-2I$ . (2 puntos).
  - No existe matriz inversa de la matriz  $A-I$ . (2 puntos).
- Determinar el valor del parámetro real  $\lambda$  para el que se verifica  $A^{-1} = \lambda(A-2I)$ . (2 puntos).

**Problema A.2.** Dadas las rectas de ecuaciones

$$r = \begin{cases} 5x + y - z = 4 \\ 2x - 2y - z = -5 \end{cases} \quad \text{y} \quad s = \begin{cases} x - y = -5 \\ z = 4 \end{cases},$$

se pide:

- Justificar que las rectas  $r$  y  $s$  se cruzan. (4 puntos).
- Calcular razonadamente la distancia entre las rectas  $r$  y  $s$ . (3 puntos).
- Determinar la ecuación del plano  $\pi$  que es paralelo y equidistante a las rectas  $r$  y  $s$ . (3 puntos).

**Problema A.3.** Se quiere construir un estadio vallado de 10000 metros cuadrados de superficie. El estadio está formado por un rectángulo de base  $x$  y dos semicírculos exteriores de diámetro  $x$ , de manera que cada lado horizontal del rectángulo es diámetro de uno de los semicírculos. El precio de un metro de valla para los lados verticales del rectángulo es de 1 euro y el precio de un metro de valla para las semicircunferencias es de 2 euros. Se pide obtener razonadamente:

- La longitud del perímetro del campo en función de  $x$ . (3 puntos).
- El coste  $f(x)$  de la valla en función de  $x$ . (3 puntos).
- El valor de  $x$  para el que el coste de la valla es mínimo. (4 puntos).

## OPCIÓN B

**Problema B.1.** Dado el sistema de ecuaciones lineales que depende de los parámetros  $a$ ,  $b$  y  $c$

$$\begin{cases} 2ax + by + z = 3c \\ 3x - 2by - 2cz = a, \\ 5ax - 2y + cz = -4b \end{cases}$$

se pide:

- Justificar razonadamente que para los valores de los parámetros  $a = 0$ ,  $b = -1$  y  $c = 2$  el sistema es incompatible. (3 puntos).
- Determinar razonadamente los valores de los parámetros  $a$ ,  $b$  y  $c$ , para los que se verifica que  $(x, y, z) = (1, 2, 3)$  es solución del sistema. (4 puntos).
- Justificar si la solución  $(x, y, z) = (1, 2, 3)$  del sistema del apartado b) es, o no, única. (3 puntos).

**Problema B.2.** Sea  $r$  la recta de vector director  $(2, -1, 1)$  que pasa por el punto  $P = (0, 3, -1)$ . Se pide:

- Hallar razonadamente la distancia del punto  $A = (0, 1, 0)$  a la recta  $r$ . (4 puntos).
- Calcular razonadamente el ángulo que forma la recta que pasa por los puntos  $P$  y  $A$  con la recta  $r$  en el punto  $P$ . (4 puntos).
- Si  $Q$  es el punto donde la recta  $r$  corta al plano de ecuación  $z = 0$ , comprobar que el triángulo de vértices  $APQ$  tiene ángulos iguales en los vértices  $P$  y  $Q$ . (2 puntos).

**Problema B.3.** Dada la función polinómica  $f(x) = 4 - x^2$ , se pide obtener razonadamente:

- La gráfica de la curva  $y = 4 - x^2$ . (2 puntos).
- El punto  $P$  de esa curva cuya tangente es perpendicular a la recta de ecuación  $x + y = 0$ . (3 puntos).
- Las rectas que pasan por el punto  $(-2, 1)$  y son tangentes a la curva  $y = 4 - x^2$ , obteniendo los puntos de tangencia. (5 puntos).