GENERALITAT VALENCIANA
CONSELLERIA D'EDUCACIÓ, FORMACIÓ I OCUPACIÓ

COMISSIÓ GESTORA DE LES PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT
COMISIÓN GESTORA DE LAS PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

SISTEMA UNIVERSITARI VALENCIÀ
SISTEMA UNIVERSITARIO VALENCIANO

PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT	PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATÒRIA: Setembre 2011	CONVOCATORIA: Septiembre 2011
MATEMÀTIQUES II	MATEMÁTICAS II

CRITERIS DE CORRECCIÓ / CRITERIOS DE CORRECCIÓN

BAREM DE L'EXAMEN: Cal elegir sols UNA de les dues OPCIONS, A o B, i s'han de fer els tres problemes d'aquesta opció.
Cada problema puntua fins a 10 punts.
La qualificació de l'exercici és la suma de les qualificacions de cada problema dividida entre 3, i aproximada a les centèsimes.
Cada estudiant pot disposar d'una calculadora científica o gràfica. Se'n prohibeix la utilització indeguda (guardar fórmules o text en memòria).
S'use o no la calculadora, els resultats analítics i gràfics han d'estar sempre degudament justificats.
BAREMO DEL EXAMEN: **Se elegirá solo UNA de las dos OPCIONES, A o B, y se han de hacer los tres problemas de esa opción.**
Cada problema se puntuará hasta 10 puntos.
La calificación del ejercicio será la suma de las calificaciones de cada problema dividida entre 3 y aproximada a las centésimas.
Cada estudiante podrá disponer de una calculadora científica o gráfica. Se prohíbe su utilización indebida (guardar fórmulas o texto en memoria).
Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.

OPCIÓ A

Problema A.1. Es donen les matrius $A=\begin{pmatrix}0 & -2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$, $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ y M, on M és una matriu de dues files i dues columnes que verifica $M^2=M$. Obtingueu **raonadament**:

a) Tots els valors reals k per als que la matriu $B=A-kI$ té inversa. (*2 punts*).

b) La matriu inversa B^{-1} quan $k=3$. (*2 punts*).

c) Les constants reals α i β per a les quals es verifica que $\alpha A^2+\beta A=-2I$. (*4 punts*).

d) Comproveu **raonadament** que la matriu $P=I-M$ compleix les relacions: $P^2=P$ i $MP=PM$.
(*2 punts, repartits en 1 punt cada igualtat*).

Solució:
a) Les arrels del determinant de B són 1 i 2, per tant té inversa quan k és un nombre real diferent d'1 i 2.
b) Pel mètode d'adjunts s'obté directament que la matriu inversa és $B^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 2\\ -1 & -3\end{pmatrix}$ (és també immediat per qualsevol altre mètode).
c) En fer operacions, igualar i simplificar s'obtenen les equacions $-2\alpha=-2$; $3\alpha+\beta=0$; $7\alpha+3\beta=-2$, la solució de les quals és $\alpha=1$ i $\beta=-3$.
d) $P^2=I-2M+M^2=I-M$ i tant MP com PM donen la matriu $M-M^2=O$.

Problema A.2. En l'espai es donen les rectes $r:\begin{cases}x=3+\lambda\\ y=-1+2\lambda\\ z=2+\lambda\end{cases}$ i $s:\begin{cases}x+2y-1=0\\ 3y-z+2+\alpha=0\end{cases}$. Obtingueu **raonadament**:

a) El valor de α per al qual les rectes r i s estan contingudes en un pla. (*4 punts*).
b) L'equació del pla que conté les rectes r i s per al valor d'obtingut en l'apartat anterior. (*2 punts*).
c) L'equació del pla perpendicular a la recta r que conté el punt (1,2,1) (*4 punts*).

Solució:
a) Les rectes no són paral·leles. Estan en un pla si i només si es tallen en un punt. El possible punt d'intersecció (substituir les equacions de r en $x+2y-1=0$) és $(3,-1,2)$. En substituir és $(3,-1,2)$ en $3y-z+2+\alpha=0$ es dedueix que $\alpha=3$.
b) El producte vectorial d'un vector director de r per un altre de s és $\delta(1,-1,1)$, per tant el pla demanat és $(x-3)-(y+1)+(z-2)=0$.
c) $(x-1)+2(y-2)+(z-1)=0$ és l'equació del pla demanat, perquè $(A,B,C)=\delta(1,2,1)$ i passa per (1,2,1).

Problema A.3 Donada la funció $f(x)=x^2e^{-x}$. Obtingueu **raonadament**:

a) El domini i el recorregut de la funció f (*2 punts*).
b) Els valors de x on la funció f arriba al màxim relatiu i el mínim relatiu. (*2 punts*).
c) Els intervals de creixement i de decreixement de la dita funció f (*2 punts*).
d) Els valors de x on la funció f té els punts d'inflexió. (*2 punts*).

Solució: a) Domini **R** (perquè $e^{-x}\neq 0$) i recorregut $[0, +\infty[$, perquè no és negativa i el màxim absolut l'aconsegueix en x=2.
b) La derivada primera $((2x-x^2)e^{-x})$ s'anul·la en 0 i 2. Només és positiva entre aqueixos valors, mín. rel. en x=0 i màx. rel. en x=2.
c) Del signe de la derivada es dedueix que $f(x)$ és decreixent si $x<0$ o si $x>2$, i és creixent entre 0 i 2.
d) La derivada segona $((2-4x+x^2)e^{-x})$ s'anul·la en $2+2^{1/2}$ i en $2-2^{1/2}$, que són les abscisses dels punts d'inflexió.
e) L'asímptota horitzontal és $y=0$, perquè el límit de $f(x)$ quan x tendeix a $+\infty$ és 0. El gràfic decreix quan $x<0$, creix quan x varia entre 0 i 2, i decreix quan $x>2$, tendint a l'asímptota horitzontal.

OPCIÓ B

Problema B.1. Es donen les matrius $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ i T, T es una matriu quadrada de 3 files amb determinant $\sqrt{2}$.

Calculeu **raonadament** els determinants de les següents matrius, i indiqueu explícitament les propietats utilitzades en el seu càlcul:

a) $\frac{1}{2}T$. (*3 punts*).

b) M^4. (*3 punts*).

c) TM^3T^{-1}. (*4 punts*).

Solució:

a) En multiplicar una fila per (1/2) el determinant queda multiplicat per (1/2), per tant el determinant de (1/2)T és $(1/2)^3 2^{1/2}$=0,176..

b) determinant (M^4) = [determinant M]^4=6^4=1296.

c) determinant (TM^3T^{-1}) = [determinant T][determinant $(M)^3$] [determinant (T)]$^{-1}$ = 6^3 =216.

Problema B.2. Es dóna la recta $r: \begin{cases} x-4y=0 \\ y-z=0 \end{cases}$ i el pla π_α: $(2+2\alpha)x + i + \alpha z - 2 - 6\alpha = 0$ dependent del paràmetre real α. Obtingueu **raonadament**:

a) L'equació del pla de la família *H* que passa pel punt (1, 1, 0). (*3 punts*).

b) L'equació del pla de la família *H* que és paral·lel a la recta *r*. (*4 punts*).

c) L'equació del pla de la família *H* que és perpendicular a la recta *r*. (*3 punts*).

Solució:

a) En substituir el punt es dedueix que $\alpha = 1/4$. En substituir α=1/4 s'obté que el pla és $10x + 4y + z - 14$=0.

b) En ser (0, 0, 0) i (4, 1, 1) dos punts de *r*, s'obtindrà el pla paral·lel quan $(2+2\alpha)4 + 1 + \alpha = 0$, per la qual cosa $\alpha = -1$. En substituir aquest valor s'obté que el pla paral·lel és $y - z + 4$=0.

c) El pla serà perpendicular quan $(2+2\alpha, 1, \alpha) = \lambda(4,1,1)$, la qual cosa implica $\alpha = 1$, després el pla perpendicular és $4x + i + z - 8 = 0$.

Problema B.3. Un cotxe es desplaça sobre l'arc de paràbola Γ d'equació $2y = 36 - x^2$, on x varia entre – 6 i 6. Es representa per $f(x)$ a la distància del punt (0,9) al punt (x, y) de l'arc Γ on està situat el cotxe. Es demana obtindre **raonadament**:

a) L'expressió de $f(x)$. (*2 punts*)
b) Els punts de l'arc Γ on la distància $f(x)$ té mínims relatius. (*2 punts*).
c) Els valors màxim i mínim de la distància $f(x)$. (*2 punt*)
d) L'àrea de la superfície limitada per l'arc de paràbola Γ i el segment rectilini que uneix els punts (-6,0) i (6,0). (*4 punts*).

Solució:

a) $[f(x)]^2 = x^2 + (9 - x^2/2)^2 = 81 - 8x^2 + x^4/4$.

b) La derivada de l'expressió anterior és $x(x^2 - 16)$. És negativa quan $x < -4$ i quan x varia entre 0 i 4. Aquesta derivada és positiva quan x varia entre – 4 i 0 i quan $x > 4$. La distància $f(x)$ té mínims relatius quan x és – 4 i quan x és 4. Té un màxim relatiu en x = 0. Els punts demanats són (–4, 10) i (4, 10).

c) En substituir en la distància els mínims relatius, el màxim relatiu i els extrems del domini es dedueix: 1.- Que la distància mínima s'aconsegueix en els mínims relatius, sent $17^{1/2}$ =4,1231… la distància mínima. 2.- Que la distància màxima s'aconsegueix en els extrems, sent $117^{1/2}$ = 10,81665… la distància màxima.

d) La integral de $18 - (x^2/2)$ és $18x - (x^3/6)$ i en aplicar la regla de Barrow (es pot utilitzar la simetria) s'obté 2(108 – 36) = 144.

CRITERIS DE CORRECCIÓ / CRITERIOS DE CORRECCIÓN

BAREM DE L'EXAMEN: Cal elegir sols UNA de les dues OPCIONS, A o B, i s'han de fer els tres problemes d'aquesta opció.
Cada problema puntua fins a 10 punts.
La qualificació de l'exercici és la suma de les qualificacions de cada problema dividida entre 3, i aproximada a les centèsimes.
Cada estudiant pot disposar d'una calculadora científica o gràfica. Se'n prohibeix la utilització indeguda (guardar fórmules o text en memòria).
S'use o no la calculadora, els resultats analítics i gràfics han d'estar sempre degudament justificats.
BAREMO DEL EXAMEN: **Se elegirá solo UNA de las dos OPCIONES, A o B, y se han de hacer los tres problemas de esa opción.**
Cada problema se puntuará hasta 10 puntos.
La calificación del ejercicio será la suma de las calificaciones de cada problema dividida entre 3 y aproximada a las centésimas.
Cada estudiante podrá disponer de una calculadora científica o gráfica. Se prohíbe su utilización indebida (guardar fórmulas o texto en memoria).
Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.

OPCIÓN A

Problema A.1. Se consideran las matrices $A=\begin{pmatrix}0 & -2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$, $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ y M, donde M es una matriz de dos filas y dos columnas que verifica $M^2 = M$. Obtener **razonadamente**:

a) Todos los valores reales k para los que la matriz $B = A - kI$ tiene inversa. (*2 puntos*).
b) La matriz inversa B^{-1} cuando $k = 3$. (*2 puntos*).
c) Las constantes reales α y β para las que se verifica que $\alpha A^2 + \beta A = -2I$. (*4 puntos*).
d) Que si la matriz M verifica que $M^2 = M$ entonces la matriz $P = I - M$ cumple las relaciones: $P^2 = P$ y $MP = PM$. (*2 puntos, repartidos en 1 punto cada igualdad*).

Solución:
a) Las raíces del determinante de B son 1 y 2, luego tiene inversa cuando k es un número real diferente de 1 y 2.
b) Por el método de adjuntos se obtiene directamente que la matriz inversa de $B=\begin{pmatrix}-3 & -2\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ es $B^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 2\\ -1 & -3\end{pmatrix}$ (es también inmediato por cualquier otro método).
c) Al hacer operaciones, igualar y simplificar se obtienen las ecuaciones $-2\alpha = -2$; $3\alpha + \beta = 0$; $7\alpha + 3\beta = -2$, cuya solución es $\alpha = 1$ y $\beta = -3$.
d) $P^2 = I - 2M + M^2 = I - M$ y tanto MP como PM dan la matriz $M - M^2 = O$.

Problema A.2. En el espacio se dan las rectas $r := \begin{cases} x = 3+\lambda \\ y = -1+2\lambda \\ z = 2+\lambda \end{cases}$ y $s := \begin{cases} x+2y-1=0 \\ 3y - z + 2 + \alpha = 0 \end{cases}$. Se pide obtener **razonadamente**:

a) El valor de α para el que las rectas r y s están contenidas en un plano. (*4 puntos*).
b) La ecuación del plano que contiene a las rectas r y s para el valor de α obtenido en el apartado anterior. (*2 puntos*).
c) La ecuación del plano perpendicular a la recta r que contiene el punto (1,2,1) (*4 puntos*).

Solución:
a) Las rectas no son paralelas. Están en un plano si y sólo si se cortan en un punto. El posible punto de intersección (sustituir las ecuaciones de r en $x + 2y - 1=0$) es (3, –1, 2). Al sustituir es (3, –1, 2) en $3y - z + 2 + \alpha = 0$ se deduce que $\alpha = 3$.
b) El producto vectorial de un vector director de r por otro de s es δ(1, –1,1), por lo que el plano pedido es $(x-3) - (y+1) + (z-2) = 0$.
c) $(x - 1) + 2(y - 2) + (z - 1)=0$ es la ecuación del plano pedido, pues (A ,B, C) = δ(1,2,1) y pasa por (1,2,1).

Problema A.3. Dada la función f definida por $f(x) = x^2e^{-x}$, se pide obtener **razonadamente**:

a) El dominio y el recorrido de la función f. (*2 puntos*).
b) Los valores de x donde la función f alcanza el máximo relativo y el mínimo relativo. (*2 puntos*).
c) Los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de dicha función. (*2 puntos*).
d) Los valores de x donde la función f tiene los puntos de inflexión. (*2 puntos*).
e) La gráfica de la curva $y = x^2e^{-x}$, explicando con detalle la obtención de su asíntota horizontal. (*2 puntos*).

Solución: a) Dominio **R** (pues $e^{-x} \neq 0$) y recorrido $[0, +\infty[$, pues no es negativa y el máximo absoluto lo alcanza en x=2.
b) La derivada primera $((2x- x^2)\, e^{-x})$ se anula en 0 y 2. Sólo es positiva entre esos valores, luego mín. rel. en x=0 y máx. rel. en x=2.
c) Del signo de la derivada se deduce que f(x) es decreciente si $x<0$ o si $x>2$, siendo creciente entre 0 y 2.
d) La derivada segunda $((2-4x+ x^2)\, e^{-x})$ se anula en $2+2^{1/2}$ y en $2-2^{1/2}$, que son las abscisas de los puntos de inflexión.
e) La asíntota horizontal es $y = 0$, pues el límite de $f(x)$ cuando x tiende a $+\infty$ es 0. La gráfica decrece cuando $x < 0$, crece cuando x varía entre 0 y 2, y decrece cuando $x > 2$, tendiendo a la asíntota horizontal.

OPCIÓN B

Problema B.1. Sea M la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ y sea T una matriz cuadrada de 3 filas cuyo determinante vale $2^{1/2}$.

Calcular **razonadamente** los determinantes de las siguientes matrices, indicando explícitamente las propiedades utilizadas en su cálculo:

a) $(1/2)T$. (*3 puntos*).

b) M^4 . (*3 puntos*).

c) TM^3T^{-1} . (4 *puntos*).

Solución:

a) Al multiplicar una fila por (1/2) el determinante queda multiplicado por (1/2), luego el determinante de $(1/2)T$ es $(1/2)^3 2^{1/2}$=0,176..

b) determinante (M^4) = [determinante M]^4=6^4=1296.

c) determinante (TM^3T^{-1}) = [determinante T][determinante $(M)^3$] [determinante (T)]$^{-1}$ = 6^3 =216.

Problema B.2. Se da la recta $r: \begin{cases} x-4y=0 \\ y-z=0 \end{cases}$ y el plano π_α: $(2+2\alpha)x + y + \alpha z - 2 - 6\alpha = 0$ dependiente del parámetro real α. Obtener **razonadamente**:

a) La ecuación del plano de la familia H que pasa por el punto (1, 1, 0). (*3 puntos*).

b) La ecuación del plano de la familia H que es paralelo a la recta r. (*4 puntos*).

c) La ecuación del plano de la familia H que es perpendicular a la recta r. (*3 puntos*).

Solución:

a) Al sustituir el punto se deduce que $\alpha = 1/4$. Al sustituir $\alpha=1/4$ se obtiene que el plano es $10x + 4y + z - 14=0$.

b) Al ser (0, 0, 0) y (4, 1, 1) dos puntos de r, se obtendrá el plano paralelo cuando $(2+2\alpha)4 + 1 + \alpha = 0$, por lo que $\alpha = -1$. Al sustituir este valor se obtiene que el plano paralelo es $y - z + 4=0$.

c) El plano será perpendicular cuando $(2+2\alpha, 1, \alpha) = \lambda(4,1,1)$, lo que implica $\alpha = 1$, luego el plano perpendicular es $4x + y + z - 8 = 0$.

Problema B.3. Un coche se desplaza sobre el arco de parábola Γ de ecuación $2y = 36 - x^2$, donde x varía entre – 6 y 6. Se representa por $f(x)$ a la distancia del punto (0,9) al punto (x, y) del arco Γ donde está situado el coche. Se pide obtener **razonadamente**:

a) La expresión de $f(x)$. (*2 puntos*)

b) Los puntos del arco Γ donde la distancia $f(x)$ tiene mínimos relativos. (*2 puntos*).

c) Los valores máximo y mínimo de la distancia $f(x)$. (*2 punto*)

d) El área de la superficie limitada por el arco de parábola Γ y el segmento rectilíneo que une los puntos (-6,0) y (6,0). (*4 puntos*).

Solución:

a) $[f(x)]^2 = x^2 + (9 - x^2/2)^2 = 81 - 8x^2 + x^4/4$.

b) La derivada de la expresión anterior es $x(x^2 - 16)$. Es negativa cuando $x < -4$ y cuando x varía entre 0 y 4. Esta derivada es positiva cuando x varía entre – 4 y 0 y cuando $x > 4$. La distancia $f(x)$ tiene mínimos relativos cuando x es – 4 y cuando x es 4. Tiene un máximo relativo en x = 0. Los puntos pedidos son (–4, 10) y (4, 10).

c) Al sustituir en la distancia los mínimos relativos, el máximo relativo y los extremos del dominio se deduce: 1.- Que la distancia mínima se alcanza en los mínimos relativos, siendo $17^{1/2}$ =4,1231… la distancia mínima. 2.- Que la distancia máxima se alcanza en los extremos, siendo $117^{1/2}$ = 10,81665… la distancia máxima.

d) La integral de $18 - (x^2/2)$ es $18x - (x^3/6)$ y al aplicar la regla de Barrow (se puede utilizar la simetría) se obtiene 2(108 – 36) = 144.