COMISSIÓ GESTORA DE LES PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT
COMISIÓN GESTORA DE LAS PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

SISTEMA UNIVERSITARI VALENCIÀ
SISTEMA UNIVERSITARIO VALENCIANO

PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT	PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATÒRIA: JUNY 2012	CONVOCATORIA: JUNIO 2012
MATEMÀTIQUES II	MATEMÁTICAS II

CRITERIS DE CORRECCIÓ / CRITERIOS DE CORRECCIÓN

BAREM DE L'EXAMEN: Cal triar només UNA dels dues OPCIONS, A o B, i s'han de fer els tres problemes d'aquesta opció.
Cada problema puntua fins a 10 punts.
La qualificació de l'exercici és la suma dels qualificacions de cada problema dividida entre 3, i aproximada a les centèsimes.
Cada estudiant pot disposar d'una calculadora científica o gràfica. **Es prohibeix la utilització indeguda (guardar fórmules o text en memòria). S'use o no la calculadora, els resultats analítics i gràfics han d'estar sempre degudament justificats.**

BAREMO DEL EXAMEN: **Se elegirá solo UNA de las dos OPCIONES, A o B, y se han de hacer los tres problemas de esa opción.**
Cada problema se puntuará hasta 10 puntos.
La calificación del ejercicio será la suma de las calificaciones de cada problema dividida entre 3 y aproximada a las centésimas.
Cada estudiante podrá disponer de una calculadora científica o gráfica. **Se prohíbe su utilización indebida (guardar fórmulas o texto en memoria). Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.**

OPCIÓ A

Problema A.1. Es dóna el sistema d'equacions $S:\begin{cases}2x+ & \alpha^2 z = 5\\ x+(1-\alpha)y+z=1\\ x+2y & +\alpha^2 z=1\end{cases}$, on α és un paràmetre real. Obteniu **raonadament**:

a) La solució del sistema S quan $\alpha = 0$. (*3 punts*).
b) Totes les solucions del sistema S quan $\alpha = -1$. (*4 punts*).
c) El valor de α per al qual el sistema S és incompatible. (*3 punts*).

Solucions: a) Directament les equacions primera i tercera ens diuen que x=5/2 i y=–3/4. Substituint en la segona es dedueix que z= –3/4. b) De les dues equacions diferents es dedueix directament que z=5-2x i y=(x/2)-2. c) El determinant de la matriu dels coeficients és $-\alpha^3+3\alpha^2-4$. De l'apartat a) es dedueix que α=-1 és una arrel i en dividir per α-(-1) s'obté (Ruffini) $-\alpha^3+3\alpha^2-4=(\alpha+1)(-\alpha^2+4\alpha-4)$, per la qual cosa el determinant també és nul si α=2. Per a aquest valor α=2 el rang de la matriu ampliada és 3, ja que les seues columnes 1, 2 i 4 són linealment independents (n'hi ha prou amb dir que 9 és el valor del determinant format amb aquestes tres columnes). Per això el sistema és incompatible.

Problema A.2. Es donen les rectes $r_1:\begin{cases}x=1+2\alpha\\ y=\alpha\\ z=2-\alpha\end{cases}$ i $r_2:\begin{cases}x=-1\\ y=1+\beta\\ z=-1-2\beta\end{cases}$, sent α i β paràmetres reals. Calculeu **raonadament**:

a) Les coordenades del punt de tall de r_1 i r_2. (*3 punts*).
b) L'equació del pla que conté aquestes dues rectes. (*4 punts*).
c) La distància del punt $(0,\ 0,\ 1)$ a la recta r_2. (*3 punts*).

Solucions: a) En igualar les components *x* es dedueix que α=-1 i en igualar les components *y* ens queda que β=-2. Substituint en ambdues rectes s'obté que el punt de tall és (-1, -1, 3). b) El producte vectorial dels vectors direcció indicats en les fórmules és (-1,4,2), per la qual cosa l'equació del pla és –(x+1)+4(y+1)+2(z-3)=0.
c) (-1,1,-1) és un punt de la recta r_2. Llavors (0,0,1)- (-1,1,-1)= (1,-1,2) i el producte vectorial d'aquest vector per un vector unitari director de r_2 (per exemple $(1/5^{1/2})(0,1,-2)$ és $(1/5^{1/2})(0, 2, 1)$). La distància demanada és el mòdul d'aquest vector, que és 1.

Problema A.3. Amb el símbol $\ln x$ es representa el logaritme d'un nombre positiu x quan la base del logaritme és el nombre e. Siga f la funció que per a un nombre positiu x està definida per la igualtat $f(x)=4x\ln x$.

Obteniu **raonadament**: a) El valor de x on la funció f arriba al mínim relatiu. (*4 punts*).

b) L'equació de la recta tangent a la corba $y = 4x \ln x$ en el punt $(1,0)$. (*3 punts*).

c) L'àrea limitada entre les rectes $y = 0$, $x = e$ i $x = e^2$ i la corba $y = 4x \ln x$. (*3 punts*).

Solucions: a) La derivada $f'(x)$=4+4lnx és negativa si $x<e^{-1}$ i és positiva si $x>e^{-1}$. La funció donada té un mínim relatiu en $x= e^{-1}$. b) De $f'(1)=4$ es dedueix que l'equació de la recta tangent és y-0=4(x-1). c) La primitiva de f (x) és $(2x^2)\ln x-(x^2)$ (integrar per parts, ja que és molt senzilla la integral de x). En aplicar la regla de Barrow s'obté que l'àrea és $3e^4 - e^2$=156,40539…

OPCIÓ B

Problema B.1. Obteniu **raonadament:**

a) Totes les solucions $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de l'equació $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$. (*4 punts*).

b) El determinant d'una matriu quadrada B de dues files, que té matriu inversa i que verifica l'equació $B^2 = B$. (*3 punts*).

c) El determinant d'una matriu quadrada A que té quatre files i que verifica l'equació:

$A^2 - 9\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sabent a més que el determinant de A és positiu. (*3 punts*).

Solucions: a) En igualar components s'obté un sistema de les equacions primera i tercera del qual es dedueix que x=1-2z i que y=2-z. En substituir aquestes expressions en l'equació segona s'obté 0=0, per la qual cosa les solucions demanades són (1-2α, 2-α, α), sent α un nombre real qualsevol. b) De determinant B≠0 i de $(\det B)^2 = \det B$ es dedueix que det B =1. c) El quadrat del determinant A és el determinant de *9I*, que és 9^4. Llavors, el determinant de A és +81, per la condició de positiu.

Problema B.2. Es dóna la recta r d'equació $r: \begin{cases} x - 2y - 2z = 1 \\ x + 5y - z = 0 \end{cases}$ i el pla π d'equació $\pi: 2x + y + nz = p$, on n i p són dos paràmetres reals. Obteniu **raonadament**:

a) Tots els valors de n per als quals la intersecció de la recta r i el pla π és un punt. (*4 punts*).

b) El valor de n i el valor de p per als quals la recta r està continguda en el pla π. (*3 punts*).

c) El valor de n i tots els valors de p per als quals la recta r no talla el pla π. (*3 punts*).

Solucions: a) El sistema obtingut en trobar la intersecció és determinat si i només si és no nul el determinant de la matriu dels coeficients. Aquest determinant val 7n+23, per això la solució de l'apartat és el conjunt de nombre reals n diferents de -23/7. b) De a) es dedueix que n=–23/7. En substituir un punt de la recta ((-1,0,-1), per exemple) en el pla 2x+y– (23/7)z=p s'obté p=9/7. c) De a) i b) es dedueix que n= –23/7 i que p pot ser qualsevol nombre real diferent de 9/7.

Problema B.3. Per a dissenyar un escut es dibuixa un triangle T de vèrtexs $A = (0,\ 12)$, $B = \left(-x,\ x^2\right)$ i $C = \left(x,\ x^2\right)$, sent $x^2 < 12$. Obteniu **raonadament**:

a) L'àrea del triangle T en funció de l'abscissa x del vèrtex C. (*2 punts*).

b) Las coordenades dels vèrtexs B i C perquè l'àrea del triangle T siga màxima. (*3 punts*).

Per a completar l'escut s'afig al triangle T d'àrea màxima la superfície S limitada entre la recta $y = 4$ i l'arc de paràbola $y = x^2$, quan $-2 \le x \le 2$. Obteniu **raonadament**:

c) L'àrea de la superfície S. (*3 punts*).

d) L'àrea total de l'escut. (*2 punts*).

Solucions:

a) L'àrea del triangle és $(1/2)(2x)(12-x^2)=12x-x^3$, amb $0\le x\le 2(3^{1/2})$.

b) La derivada de l'àrea és $12-3x^2$ és positiva si $0\le x<2$ i és negativa si $2<x\le 2(3^{1/2})$, per la qual cosa l'àrea és màxima si x=2, que ens dóna els vèrtexs B=(–2,4) i C=(2,4).

c) La integral de $4-x^2$ és $4x-(x^3/3)$, per la qual cosa l'àrea demanada és 2(8-[8/3])=32/3.
d) L'àrea màxima del triangle *T* és $12(2)-(2)^3=16$, per això l'àrea de l'escut és 16+32/3=26,66666…

OPCIÓN A

Problema A.1. Se da el sistema de ecuaciones $S:\begin{cases}2x+ & \alpha^2 z=5\\ x+(1-\alpha)y+z=1\\ x+2y & +\alpha^2 z=1\end{cases}$, donde α es un parámetro real.

Obtener **razonadamente**:

a) La solución del sistema S cuando $\alpha=0$. (*3 puntos*).
b) Todas las soluciones del sistema S cuando $\alpha=-1$. (*4 puntos*).
c) El valor de α para el que el sistema S es incompatible. (*3 puntos*).

Soluciones:

a) Directamente las ecuaciones primera y tercera nos dicen que x=5/2 e y=–3/4. sustituyendo en la segunda se deduce que z= –3/4.
b) De las dos ecuaciones diferentes se deduce directamente que z=5-2x e y=(x/2)-2.
c) El determinante de la matriz de los coeficientes es $-\alpha^3+3\alpha^2-4$. Del apartado a) se deduce que α=-1 es una raíz y al dividir por α-(-1) se obtiene (Ruffini) $-\alpha^3+3\alpha^2-4=(\alpha+1)(-\alpha^2+4\alpha-4)$, por lo que el determinante también es nulo si α=2. Para este valor α=2 el rango de la matriz ampliada es 3, pues sus columnas 1, 2 y 4 son linealmente independientes (es suficiente con decir que 9 es el valor del determinante formado con estas tres columnas). Por lo que el sistema es incompatible.

Problema A.2. Se dan las rectas $r_1:\begin{cases}x=1+2\alpha\\ y=\alpha\\ z=2-\alpha\end{cases}$ *y* $r_2:\begin{cases}x=-1\\ y=1+\beta\\ z=-1-2\beta\end{cases}$, siendo *α* y *β* parámetros reales.

Calcular **razonadamente**:

a) Las coordenadas del punto de corte de r_1 y r_2. (*3 puntos*).
b) La ecuación del plano que contiene esas dos rectas. (*4 puntos*).
c) La distancia del punto $(0,\ 0,\ 1)$ a la recta r_2. (*3 puntos*).

Soluciones:

a) Al igualar las componentes x se deduce que α=-1 y al igualar las componentes y nos queda que β=-2. Sustituyendo en ambas rectas se obtiene que el punto de corte es (-1, -1, 3).
b) El producto vectorial de los vectores dirección indicados en las fórmulas es (-1,4,2), por lo que la ecuación del plano es
–(x+1)+4(y+1)+2(z-3)=0.
c) (-1,1,-1) es un punto de la recta r_2. Entonces (0,0,1)- (-1,1,-1)= (1,-1,2) y el producto vectorial de este vector por un vector unitario director de r_2 (por ejemplo $(1/5^{1/2})(0,1,-2)$ es $(1/5^{1/2})(0, 2, 1)$). La distancia pedida es el módulo de este vector, que es 1.

Problema A.3. Con el símbolo $\ln x$ se representa el logaritmo de un número positivo *x* cuando la base del logaritmo es el número e. Sea *f* la función que para un número positivo *x* está definida por la igualdad

$$f(x)=4x\ln x.$$

Obtener **razonadamente**:

a) El valor de *x* donde la función *f* alcanza el mínimo relativo. (*4 puntos*).
b) La ecuación de la recta tangente a la curva $y=4x\ln x$ en el punto $(1,0)$. (*3 puntos*).
c) El área limitada entre las rectas $y=0$, $x=e$ y $x=e^2$ y la curva $y=4x\ln x$. (*3 puntos*).

Soluciones:

a) La derivada $f'(x)$=4+4lnx es negativa si $x<e^{-1}$ y es positiva si $x>e^{-1}$. La función dada tiene un mínimo relativo en $x=e^{-1}$.
b) De $f'(1)=4$ se deduce que la ecuación de la recta tangente es y-0=4(x-1).
c) La primitiva de $f(x)$ es $(2x^2)\ln x-(x^2)$ [integrar por partes, pues es muy sencilla la integral de x]. Al aplicar la regla de Barrow se obtiene que el área es $3e^4-e^2$=156,40539…

OPCIÓN B

Problema B.1. Obtener **razonadamente:**

a) Todas las soluciones $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de la ecuación $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$. (*4 puntos*).

b) El determinante de una matriz cuadrada B de dos filas, que tiene matriz inversa y que verifica la ecuación $B^2 = B$. (*3 puntos*).

c) El determinante de una matriz cuadrada A que tiene cuatro filas y que verifica la ecuación:

$$A^2 - 9\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sabiendo además que el determinante de *A* es positivo. (*3 puntos*).

Soluciones:

a) Al igualar componentes se obtiene un sistema de cuyas ecuaciones primera y tercera se deduce que x=1-2z y que y=2-z. Al sustituir estas expresiones en la ecuación segunda se obtiene 0=0, por lo que las soluciones pedidas son (1-2α, 2-α, α), siendo α un número real cualquiera.

b) De determinante B≠0 y de $(\det B)^2 = \det B$ se deduce que det B =1.

c) El cuadrado del determinante de A es el determinante de 9*I*, que es 9^4. Luego el determinante de A es +81, por la condición de positivo.

Problema B.2. Se da la recta r de ecuación $r: \begin{cases} x - 2y - 2z = 1 \\ x + 5y - z = 0 \end{cases}$ y el plano π de ecuación $\pi : 2x + y + nz = p$, donde *n* y *p* son dos parámetros reales. Obtener **razonadamente**:

a) Todos los valores de n para los que la intersección de la recta r y el plano π es un punto. (*4 puntos*).
b) El valor de n y el valor de p para los que la recta r está contenida en el plano π. (*3 puntos*).
c) El valor de n y todos los valores de p para los que la recta r no corta al plano π. (*3 puntos*).

Soluciones:

a) El sistema obtenido al hallar la intersección es determinado sii es no nulo el determinante de la matriz de los coeficientes. Este determinante vale 7n+23, luego la solución del apartado es el conjunto de número reales n distintos de -23/7.

b) De a) se deduce que n=–23/7. Al sustituir un punto de la recta ((-1,0,-1), por ejemplo) en el plano 2x+y–(23/7)z=p se obtiene
p=9/7.

c) De a) y b) se deduce que n= –23/7 y que p puede ser cualquier número real distinto de 9/7.

Problema B.3. Para diseñar un escudo se dibuja un triángulo *T* de vértices $A = (0,\ 12)$, $B = \left(-x,\ x^2\right)$ y $C = \left(x,\ x^2\right)$, siendo $x^2 < 12$. Obtener **razonadamente**:

e) El área del triángulo *T* en función de la abscisa x del vértice C. (*2 puntos*).
f) Las coordenadas de los vértices B y C para que el área del triángulo T sea máxima. (*3 puntos*).

Para completar el escudo se añade al triángulo *T* de área máxima la superficie *S* limitada entre la recta $y = 4$ y el arco de parábola $y = x^2$, cuando $-2 \le x \le 2$. Obtener **razonadamente**:

g) El área de la superficie *S.* (*3 puntos*).
h) El área total del escudo. (*2 puntos*).

Soluciones:

a) El área del triángulo es $(1/2)(2x)(12-x^2)=12x-x^3$, con $0 \le x \le 2(3^{1/2})$.

b) La derivada del área es $12-3x^2$ es positiva si $0 \le x < 2$ y es negativa si $2 < x \le 2(3^{1/2})$, por lo que el área es máxima si x=2, que nos da los vértices B=(–2,4) y C=(2,4).

c) La integral de $4-x^2$ es $4x-(x^3/3)$, por lo que el área pedida es 2(8-[8/3])=32/3.

d) El área máxima del triángulo *T* es $12(2)-(2)^3=16$, por lo que el área del escudo es 16+32/3=26,66666…