PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT	PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATÒRIA: SETEMBRE 2012	CONVOCATORIA: SEPTIEMBRE 2012
MATEMÀTIQUES II	MATEMÁTICAS II

CRITERIS DE CORRECCIÓ / CRITERIOS DE CORRECCIÓN

BAREM DE L'EXAMEN: Cal triar només UNA dels dues OPCIONS, A o B, i s'han de fer els tres problemes d'aquesta opció.
Cada problema puntua fins a 10 punts.
La qualificació de l'exercici és la suma dels qualificacions de cada problema dividida entre 3, i aproximada a les centèsimes.
Cada estudiant pot disposar d'una calculadora científica o gràfica. **Es prohibeix la utilització indeguda (guardar fórmules o text en memòria). S'use o no la calculadora, els resultats analítics i gràfics han d'estar sempre degudament justificats.**

BAREMO DEL EXAMEN: **Se elegirá solo UNA de las dos OPCIONES, A o B, y se han de hacer los tres problemas de esa opción.**
Cada problema se puntuará hasta 10 puntos.
La calificación del ejercicio será la suma de las calificaciones de cada problema dividida entre 3 y aproximada a las centésimas.
Cada estudiante podrá disponer de una calculadora científica o gráfica. **Se prohíbe su utilización indebida (guardar fórmulas o texto en memoria). Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.**

OPCIÓ A

Problema A.1. Siga el sistema d'equacions $S:\begin{cases} x-2y-3z=0 \\ 3x+10y-z=0, \\ x+14y+\alpha z=0\end{cases}$ on α és un paràmetre real. Obteniu **raonadament**: a) La solució del sistema S quan $\alpha=0$. (*4 punts*).

b) El valor de α per al qual el sistema *S* té infinites solucions. (*4 punts*).

c) Totes les solucions del sistema *S* quan es dóna a α el valor obtingut en l'apartat b). (*2 punts*).

Solució: a) (0,0,0) és solució i com que el determinant de la matriu de coeficients de les incògnites és $(16\alpha-80)_{\alpha=0}=-80\neq 0$ la solució és única. b) Quan $16\alpha-80=0$, $\alpha=5$, el sistema té infinites solucions, perquè el rang de la matriu dels coeficients (i de l'ampliada) és 2. c) Substituint $\alpha=5$ les dues primeres equacions ens donen $x=-4y$, $z=-2y$; en substituir en la tercera equació s'obté 0 = 0, per tant, totes les solucions demanades són $(-4\lambda,\ \lambda,\ -2\lambda)$, amb λ un nombre real qualsevol.

Problema A.2. En l'espai es té la recta *r* i el pla *π* d'equacions $r:\begin{cases} x+y-z=1 \\ x-y-z=0\end{cases}$ i $\pi: x+mz=0$.

on *m* és un paràmetre real. Obteniu **raonadament**: a) Un vector director de la recta *r*. (*2 punts*).

b) El valor de *m* per al qual la recta *r* i el pla π són perpendiculars. (*2 punts*).

c) El valor de *m* per al qual la recta *r* i el pla π són paral·lels. (*3 punts*).

d) La distància entre *r* i π quan es dóna a *m* el valor obtingut en l'apartat c). (*3 punts*).

Solució:
a) Val qualsevol solució de $x+y-z=0$; $x-y-z=0$. Per exemple (1, 0, 1). b) Els vectors (1, 0, 1) i (1, 0, *m*) han de ser linealment dependents (components proporcionals), per tant $m=1$. c) Ha de ser 0 el producte escalar dels vectors (1, 0, 1) i (1, 0, *m*), per la qual cosa $m=-1$. d) Un punt de *r* és $P=(1/2, 1/2, 0)$. La distància de *P* al pla $x-z=0$ és $(1/2)/2^{1/2}=0{,}353553390\ldots$

Problema A.3. Es defineixen les funcions f i g per $f(x)=-x^2+2x$ i $g(x)=x^2$. Obteniu **raonadament**:

a) Els intervals de creixement i decreixement de cada una d'aquestes dues funcions. (2 *punts*).

b) El màxim relatiu de la funció $f(x)=-x^2+2x$ i el mínim relatiu de $g(x)=x^2$. (2 *punts*).

c) Els punts d'intersecció de les corbes $y=-x^2+2x$ i $y=x^2$. (2 *punts*).

d) L'àrea tancada entre les corbes $y=-x^2+2x$ i $y=x^2$, en la qual en els dos casos la *x* varia entre 0 i 1. (4 *punts*).

Solució: a) $f'(x) = -2x + 2$ és positiva si $x<1$ i és negativa si $x>1$, la qual cosa ens diu quan f decreix i quan creix. Atès que $g'(x) = 2x$ tenim que g creix si $x > 0$ i decreix si $x < 0$. b) $f(x)$ arriba al màxim relatiu quan $x = 1$ i $g(x)$ té el mínim relatiu quan $x = 0$. c) En resoldre el sistema s'obté $2x(x - 1)=0$, per tant $x = 0$ i $x = 1$ ens permeten obtenir els punts d'intersecció substituint en qualsevol de les corbes, resultant: (0, 0) i (1, 1).
d) $f(x) - g(x) = -2x^2 + 2x$ és la distància entre els punts $(x, f(x))$ i $(x, g(x))$, per la qual cosa l'àrea és la integral de $-2x^2 + 2x$ entre 0 i 1, que ens dóna $-(2/3) + 1 = 1/3$.

OPCIÓ B

Problema B.1. Es donen les matrius $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ i B, on B és una matriu de dues files i dues columnes que no té cap element nul i que verifica la relació $B^2 = -7B + U$. Obteniu **raonadament**:

a) Els nombres reals a i b tals que $A^2 = aA + bU$. (*4 punts*).

b) Els nombres reals p i q tals que $B^{-1} = pB + qU$ (*2 punts*), i **justifiqueu** que la matriu B té inversa (*2 punts*).

c) Obteniu els valors x i y per als quals es verifica que $B^3 = xB + yU$. (*2 punts*).

Solució: Atès que B no és diagonal no cal trobar les infinites solucions dels dos últims apartats quan B és una matriu diagonal. No cal que indiquen ni l'existència de la matriu B, per exemple $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -7 & -8 \end{pmatrix}$, ni que diguen res sobre la independència lineal de B i U (propietat que utilitzaran en els dos últims apartats). a) En igualar la components de les matrius d'ambdós membres s'obté un sistema, la solució del qual és $a = 2$ i $b = -2$.
b) De $B(B + 7U) = U$ es dedueix que la matriu B admet matriu inversa i que $B^{-1} = B + 7U$, per la qual cosa $p = 1$ i $q = 7$. c) $B^3 = B(-7B + U) = -7B^2 + B = 49B - 7U + B = 50B - 7U$, per tant, $x = 50$ i $y = -7$.

Problema B.2. En l'espai es donen els plans π, σ i τ d'equacions

$$\pi:\ 2x - y + z = 3;\ \sigma:\ x - y + z = 2;\ \tau:\ 3x - y - az = b$$

sent a i b paràmetres reals, i la recta r intersecció dels plans π i σ. Obteniu **raonadament**:

a) Un punt, el vector director i les equacions de la recta r. (*3 punts*).

b) L'equació del pla que conté la recta r i passa pel punt $(2, 1, 3)$. (*4 punts*).

c) Els valors de a i de b perquè el pla τ continga la recta r, intersecció dels plans π i σ. (*3 punts*).

Solució:
a) Les equacions de la recta r són el sistema format per les equacions de π i σ. Una solució d'aquest sistema és (1,0,1), que és un punt de r. Un vector director és una solució del sistema 2x-y+z=0, x-y+z=0, per exemple (0,1,1), (o bé el vector determinat per la diferència de components corresponents de dos punts de r. També és el producte vectorial de dos vectors normals a π i σ). b) És suficient trobar l'equació del pla que passa pels punts(1,0,1), (1+0, 0+1, 1+1) i (2, 1, 3), o bé del feix $\alpha(2x - y + z - 3) + \beta(x - y + z - 2) = 0$ seleccionar el pla que passa per (2, 1, 3), és a dir $\alpha(4 - 1 + 3 - 3) + \beta(2 - 1 + 3 - 2) = 0$, que ens dóna $3\alpha + 2\beta = 0$. El pla demanat és $2(2x - y + z - 3) - 3(x - y + z - 2) = 0$, és a dir: $x + y - z = 0$. c) Substituint dos punts de r, per exemple (1,0,1) i (1,1,2) en l'equació de τ s'obté el sistema $3 - a = b$ i $3 - 1 - 2a = b$, la solució del qual és $a = -1$ i $b = 4$.

Problema B.3. Es vol construir un depòsit cilíndric de 100 m^3 de capacitat, obert per la part superior. La base és un cercle en posició horitzontal de radi x i la paret vertical del depòsit és una superfície cilíndrica perpendicular a la base. El preu del material de la base del depòsit és 4 euros/m^2. El preu del material de la paret vertical és 2 euros/m^2. Obteniu **raonadament**:

a) L'àrea de la base en funció del seu radi x. (*1 punt*).

b) L'àrea de la paret vertical del cilindre en funció de x. (*2 punts*).

c) La funció $f(x)$ que dóna el cost del depòsit. (*2 punts*).

d) El valor x del radi de la base per al qual el cost del depòsit és mínim i el valor del dit cost mínim. (*5 punts*).

Solució:
a) És suficient indicar que l'àrea d'un cercle és πx^2.
b) $2\pi xh$ és l'àrea de la paret vertical, on h és l'altura del cilindre. En ser el volum 100 m^3 ha d'ocórrer que $\pi x^2 h = 100$, per la qual cosa aïllant h i substituint en l'expressió de l'àrea s'obté $2\pi xh = 200\pi x/(\pi x^2) = 200/x$.

c) Dels dos resultats anteriors s'obté $f(x) = 4\pi x^2 + 400/x$.
d) De la derivada $f'(x) = (8\pi x^3\text{-}400)/x^2$ es dedueix que la funció decreix si x varia entre 0 i $(50/\pi)^{1/3}$ i creix quan x és major que $(50/\pi)^{1/3}$ (pel signe de la derivada). Per tant, el cost mínim s'obté quan el radi de la base és $(50/\pi)^{1/3} = 2{,}51539...$ El cost mínim és $60(20\pi)^{1/3}$=238,53 €.

OPCIÓN A

Problema A.1. Sea el sistema de ecuaciones $S: \begin{cases} x - 2y - 3z = 0 \\ 3x + 10y - z = 0 \\ x + 14y + \alpha z = 0 \end{cases}$, donde α es un parámetro real. Obtener **razonadamente**:

a) La solución del sistema S cuando $\alpha = 0$. (*4 puntos*).
b) El valor de α para el que el sistema S tiene infinitas soluciones. (*4 puntos*).
c) Todas las soluciones del sistema S cuando se da a α el valor obtenido en el apartado b). (*2 puntos*).

Solución:
a) (0, 0, 0) es solución y como el determinante de la matriz de coeficientes de las incógnitas es $(16\alpha - 80)_{\alpha=0} = -80 \neq 0$ la solución es única.
b) Cuando $16\alpha - 80 = 0$, es decir si $\alpha = 5$ el sistema tiene infinitas soluciones, pues el rango de la matriz de los coeficientes (y de la ampliada) es 2.
c) Sustituyendo $\alpha = 5$ las dos primeras ecuaciones nos dan $x = -4y$, $z = -2y$; al sustituir en la tercera ecuación se obtiene 0 = 0, luego todas las soluciones pedidas son $(-4\lambda, \lambda, -2\lambda)$, con λ un número real cualquiera.

Problema A.2. En el espacio se tiene la recta r y el plano π de ecuaciones $r: \begin{cases} x + y - z = 1 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$ y $\pi: x + mz = 0$,
donde m es un parámetro real. Obtener **razonadamente**:

a) Un vector director de la recta r. (*2 puntos*).
b) El valor de m para el que la recta r y el plano π son perpendiculares. (*2 puntos*).
c) El valor de m para el que la recta r y el plano π son paralelos. (*3 puntos*).
d) La distancia entre r y π cuando se da a m el valor obtenido en el apartado c). (*3 puntos*).

Solución:
a) Vale cualquier solución de $x + y - z = 0$; $x - y - z = 0$. Por ejemplo (1, 0, 1).
b) Los vectores (1, 0, 1) y (1, 0, m) deben ser linealmente dependientes (componentes proporcionales), luego $m = 1$.
c) Debe ser 0 el producto escalar de los vectores (1, 0, 1) y (1, 0, m), por lo que $m = -1$.
d) Un punto de r es $P = (1/2, 1/2, 0)$. La distancia de P al plano $x - z = 0$ es $(1/2)/2^{1/2} = 0{,}353553390\ldots$

Problema A.3. Se definen las funciones f y g por $f(x) = -x^2 + 2x$ y $g(x) = x^2$. Obtener **razonadamente**:

a) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de cada una de esas dos funciones. (2 *puntos*).
b) El máximo relativo de la función $f(x) = -x^2 + 2x$ y el mínimo relativo de $g(x) = x^2$. (2 *puntos*).
c) Los puntos de intersección de las curvas $y = -x^2 + 2x$ e $y = x^2$. (2 *puntos*).
d) El área encerrada entre las curvas $y = -x^2 + 2x$ e $y = x^2$, donde en ambas curvas la x varía entre 0 y 1. (4 *puntos*).

Solución:
a) $f'(x) = -2x + 2$ es positiva si $x<1$ y es negativa si $x>1$, lo que nos dice cuando f decrece y cuando crece. Dado que $g'(x) = 2x$ se tiene que g crece si $x > 0$ y decrece si $x < 0$.
b) $f(x)$ alcanza el máximo relativo cuando $x = 1$ y $g(x)$ tiene el mínimo relativo cuando $x = 0$.
c) Al resolver el sistema se obtiene $2x(x - 1)=0$, por lo que $x = 0$ y $x = 1$ nos permiten obtener los puntos de intersección sustituyendo en cualquiera de las curvas, resultando: (0, 0) y (1, 1).
d) $f(x) - g(x) = -2x^2 + 2x$ es la distancia entre los puntos $(x, f(x))$ y $(x, g(x))$, por lo que el área es la integral de $-2x^2 + 2x$ entre 0 y 1, que nos da $-(2/3) + 1 = 1/3$.

OPCIÓN B

Problema B.1. Se dan las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $U=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ y B, donde B es una matriz de dos filas y dos columnas que no tiene ningún elemento nulo y que verifica la relación $B^2=-7B+U$. Obtener **razonadamente**: a) Los números reales a y b tales que $A^2=aA+bU$. (*4 puntos*).

b) Los números reales p y q tales que $B^{-1}=pB+qU$ (*2 puntos*), **justificando** que la matriz B tiene inversa (*2 puntos*).

c) Obtener los valores x e y para los que se verifica que $B^3=xB+yU$. (*2 puntos*).

Solución:
Al no ser *B* diagonal no hay que hallar las infinitas soluciones de los dos últimos apartados cuando *B* es una matriz diagonal. No hace falta que indiquen ni la existencia de la matriz *B*, por ejemplo $B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -7 & -8\end{pmatrix}$, ni que digan nada sobre la independencia lineal de *B* y *U* (propiedad que utilizarán en los dos últimos apartados).
a) Al igualar las componentes de las matrices de ambos miembros se obtiene un sistema cuya solución es $a=2$ y $b=-2$. b) De $B(B+7U)=U$ se deduce que la matriz B admite matriz inversa y que $B^{-1}=B+7U$, por lo que $p=1$ y $q=7$. c) $B^3=B(-7B+U)=-7B^2+B=49B-7U+B=50B-7U$, luego $x=50$ e $y=-7$.

Problema B.2. En el espacio se dan los planos π, σ y τ de ecuaciones

$$\pi:\ 2x-y+z=3\,;\sigma:\ x-y+z=2\,;\tau:\ 3x-y-az=b,$$

siendo *a* y *b* parámetros reales, y la recta r intersección de los planos π y σ. Obtener **razonadamente**:

a) Un punto, el vector director y las ecuaciones de la recta r. (*3 puntos*).

b) La ecuación del plano que contiene a la recta r y pasa por el punto $(2,1,3)$. (*4 puntos*).

c) Los valores de a y de b para que el plano τ contenga a la recta r, intersección de los planos π y σ. (*3 puntos*).

Solución:
a) Las ecuaciones de la recta *r* son el sistema formado por las ecuaciones de π y σ. Una solución de ese sistema es (1,0,1), que es un punto de *r*. Un vector director es una solución del sistema 2x-y+z=0, x-y+z=0, por ejemplo (0,1,1), (o bien el vector determinado por la diferencia de componentes correspondientes de dos puntos de r. También es el producto vectorial de dos vectores normales a π y σ). b) Es suficiente con hallar la ecuación del plano que pasa por los puntos (1,0,1), (1+0, 0+1, 1+1) y (2, 1, 3), o bien del haz

$$\alpha(2x-y+z-3)+\beta(x-y+z-2)=0$$

seleccionar el plano que pasa por (2, 1, 3), es decir $\alpha(4-1+3-3)+\beta(2-1+3-2)=0$, que nos da $3\alpha+2\beta=0$. El plano pedido es $2(2x-y+z-3)-3(x-y+z-2)=0$, es decir: $x+y-z=0$.
c) Sustituyendo dos puntos de *r*, por ejemplo (1,0,1) y (1,1,2) en la ecuación de τ se obtiene el sistema $3-a=b$ y $3-1-2a=b$, cuya solución es $a=-1$ y $b=4$.

Problema B.3. Se desea construir un depósito cilíndrico de 100 m^3 de capacidad, abierto por la parte superior. Su base es un círculo en posición horizontal de radio x y la pared vertical del depósito es una superficie cilíndrica perpendicular a su base. El precio del material de la base del depósito es 4 euros/m^2. El precio del material de la pared vertical es 2 euros/m^2. Obtener **razonadamente**:

a) El área de la base en función de su radio x. (*1 punto*).
b) El área de la pared vertical del cilindro en función de x. (*2 puntos*).
c) La función $f(x)$ que da el coste del depósito. (*2 puntos*).
d) El valor x del radio de la base para el que el coste del depósito es mínimo y el valor de dicho coste mínimo. (*5 puntos*).

Solución: a) Es suficiente con indicar que el área de un círculo es πx^2.
b) $2\pi xh$ es el área de la pared vertical, donde *h* es la altura del cilindro. Al ser el volumen 100 m^3 debe suceder que $\pi x^2h=100$, por lo que despejando *h* y sustituyendo en la expresión del área se obtiene $2\pi xh=200\pi x/(\pi x^2)=200/x$. c) De los dos resultados anteriores se obtiene $f(x)=4\pi x^2+400/x$.
d) De la derivada $f'(x)=(8\pi x^3-400)/x^2$ se deduce que la función decrece si *x* varía entre 0 y $(50/\pi)^{1/3}$ y crece cuando *x* es mayor que $(50/\pi)^{1/3}$ (por el signo de la derivada). Por tanto, el coste mínimo se obtiene cuando el radio de la base es $(50/\pi)^{1/3}=2{,}51539...$. El coste mínimo es $60(20\pi)^{1/3}=238{,}53$ €.