PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

CONVOCATÒRIA: JUNY 2013	CONVOCATORIA: JUNIO 2013
MATEMÀTIQUES II	MATEMÁTICAS II

CRITERIS DE CORRECCIÓ / CRITERIOS DE CORRECCIÓN
BAREM DE L'EXAMEN: Cal elegir sols UNA de les dues OPCIONS, A o B, i s'han de fer els tres problemes d'aquesta opció.
Cada problema puntua fins a 10 punts.
La qualificació de l'exercici és la suma de les qualificacions de cada problema dividida entre 3, i aproximada a les centèsimes.
Cada estudiant pot disposar d'una calculadora científica o gràfica. Se'n prohibeix la utilització indeguda (guardar fórmules o text en memòria).
S'use o no la calculadora, els resultats analítics i gràfics han d'estar sempre degudament justificats.
BAREMO DEL EXAMEN: **Se elegirá solo UNA de las dos OPCIONES, A o B, y se han de hacer los tres problemas de esa opción.**
Cada problema se puntuará hasta 10 puntos.
La calificación del ejercicio será la suma de las calificaciones de cada problema dividida entre 3 y aproximada a las centésimas.
Cada estudiante podrá disponer de una calculadora científica o gráfica. Se prohíbe su utilización indebida (guardar fórmulas o texto en memoria).
Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.

OPCIÓ A

Problema A.1. Es té el sistema d'equacions $\begin{cases} 2x+5y=a \\ -x-4y=b \\ 2x+y=c \end{cases}$, on *a, b* i *c* són tres nombres reals. Calculeu **raonadament**, **escrivint tots els passos del raonament utilitzat**:

a) La relació que han de verificar els nombres a *, b* i *c* perquè el sistema siga compatible. (4 *punts*).
b) La solució del sistema quan $a=-1$, $b=2$ i $c=3$. (2 *punts*).
c) La solució del sistema quan els nombres a *, b* i *c* verifiquen la relació $a=c=-2b$. (4 *punts*).

Solució: a) $7a+8b-3c=0$. b) $x=2, \quad y=-1$. c) $x=-b, \quad y=0$.

Problema A.2. Tenim $O=(0,0,0)$, $A=(1,0,1)$, $B=(2,1,0)$ i $C=(0,2,3)$. Determineu **raonadament**, **escrivint tots els passos del raonament utilitzat**:

a) L'àrea del triangle de vèrtexs O, A i B, (3 *punts*) i el volum del tetraedre de vèrtexs O, A, B i C. (2 *punts*).
b) La distància del vèrtex *C* al plànol que conté el triangle *OAB*. (3 *punts*).
c) La distància del punt *C*' al plànol que conté el triangle *OAB*, sent *C*' el punt mitjà del segment d'extrems *O* i *C*. (2 *punts*).

Solució: a) $\dfrac{\sqrt{6}}{2}=1{,}2247...$; $\dfrac{7}{6}=1{,}1666...$. b) $\dfrac{7}{\sqrt{6}}=2{,}8577...$. c) $\dfrac{7}{2\sqrt{6}}=1{,}4289...$

Problema A.3. Es va estudiar el moviment d'un meteorit del sistema solar durant un mes. Es va obtenir que l'equació de la seua trajectòria *T* és $y^2=2x+9$, sent $-4{,}5\le x\le 8$ i $y\ge 0$, estant situat el Sol en el punt $(0,0)$. Calculeu **raonadament**, **escrivint tots els passos del raonament utilitzat**:

a) La distància del meteorit al Sol des d'un punt *P* de la seua trajectòria l'abscissa del qual és *x*. (3 *punts*).
b) El punt *P* de la trajectòria *T* on el meteorit aconsegueix la distància mínima al Sol. (5 *punts*).
c) La distància mínima del meteorit al Sol. (2 *punts*).

Nota. En els tres resultats només cal donar l'expressió algebraica o el valor numèric obtingut, sense esmentar la unitat de mesura, per no haver sigut indicada en l'enunciat.

Solució: a) $\sqrt{x^2+2x+9}$. b) $\left(-1,\sqrt{7}\right)$. c) $\sqrt{8}$.

OPCIÓ B

Problema B.1. Ateses les matrius $A=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 4 & 2 & -2\end{pmatrix}$ *i* $B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\ 0 & -1 & 5\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$, calculeu **<u>raonadament</u>** el valor dels determinants següents, **<u>escrivint tots els passos del raonament utilitzat</u>**:

a) $|A+B|$ i $\left|\frac{1}{2}(A+B)^{-1}\right|$. (4 *punts*).

b) $\left|(A+B)^{-1}A\right|$ i $\left|A^{-1}(A+B)\right|$. (3 *punts*).

c) $\left|2ABA^{-1}\right|$ i $\left|A^{3}B^{-1}\right|$. (3 *punts*).

Solució: a) $|A+B|=24$ i $\left|\frac{1}{2}(A+B)^{-1}\right|=\frac{1}{2^3}\frac{1}{24}=5{,}2083\times 10^{-3}$. b) $\left|(A+B)^{-1}A\right|=\frac{4}{24}=\frac{1}{6}=0{,}1666...$ i $\left|A^{-1}(A+B)\right|=\frac{24}{4}=6$. c) $\left|2ABA^{-1}\right|=-32$ i $\left|A^{3}B^{-1}\right|=-16$.

Problema B.2. A partir dels punts A = (1, 0, 1), B = (2, –1, 0), C = (0, 1, 1) i P = (0, –3, 2), es demana calcular **<u>raonadament</u>**, **<u>escrivint tots els passos del raonament utilitzat</u>**:

a) La distància del punt P al punt A. (2 *punts*)

b) La distància del punt P a la recta que passa pels punts A i B. (4 *punts*)

c) La distància del punt P al plànol que passa pels punts A , B i C. (4 *punts*)

Solució: a) $\sqrt{11}=3{,}3166...$; b) $\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=3{,}2669...$; c) $\frac{4}{\sqrt{2}}=2{,}8284...$

Problema B.3. Atesa la funció f definida per $f(x)$ = sen x, per a qualsevol valor real x, es demana que calculeu **<u>raonadament</u>**, **<u>escrivint tots els passos del raonament utilitzat</u>**:

a) L'equació de la recta tangent a la corba $y=f(x)$ en el punt d'abscissa $x = \pi/6$. (4 *punts*).

b) L'equació de la recta normal a la corba $y=f(x)$ en el punt d'abscissa $x = \pi/3$. Es recorda que la recta normal a una corba en un punt P és la recta que passa per aquest punt P i és perpendicular a la recta tangent a la corba en el punt P . (3 *punts*).

c) L'angle format per les rectes determinades en els apartats a) i b). (3 *punts*).

Solució: a) $y-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$; b) $y-\frac{\sqrt{3}}{2}=-2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$;

c) $\pi-\arctan\frac{\sqrt{3}}{2}-\arctan 2=1.3207\cdots rad=75.67\cdots^{\circ}$.

S'admetrà $\arctan\frac{\sqrt{3}}{2}+\arctan 2=1.8209\cdots rad=104.32\cdots^{\circ}$.

OPCIÓN A

Problema A.1. Se tiene el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 2x+5y=a \\ -x-4y=b \\ 2x+y=c \end{cases}$, donde a, b y c son tres números reales. Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La relación que deben verificar los números a, b y c para que el sistema sea compatible. (4 *puntos*).

b) La solución del sistema cuando $a=-1$, $b=2$ y $c=3$. (2 *puntos*).

c) La solución del sistema cuando los números a, b y c verifican la relación $a=c=-2b$. (4 *puntos*).

Solución: a) $7a+8b-3c=0$. b) $x=2,\quad y=-1$. c) $x=-b,\quad y=0$.

Problema A.2. Sean $O=(0,0,0)$, $A=(1,0,1)$, $B=(2,1,0)$ y $C=(0,2,3)$. Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) El área del triángulo de vértices O, A y B, (3 *puntos*) y el volumen del tetraedro de vértices O, A, B y C. (2 *puntos*).

b) La distancia del vértice C al plano que contiene al triángulo OAB. (3 *puntos*).

c) La distancia del punto C' al plano que contiene al triángulo OAB, siendo C' el punto medio del segmento de extremos O y C. (2 *puntos*).

Solución: a) $\dfrac{\sqrt{6}}{2}=1{,}2247...$; $\dfrac{7}{6}=1{,}1666...$. b) $\dfrac{7}{\sqrt{6}}=2{,}8577...$. c) $\dfrac{7}{2\sqrt{6}}=1{,}4289...$. .

Problema A.3. Se estudió el movimiento de un meteorito del sistema solar durante un mes. Se obtuvo que la ecuación de su trayectoria T es $y^2=2x+9$, siendo $-4{,}5\le x\le 8$ e $y\ge 0$, estando situado el Sol en el punto $(0,0)$. Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La distancia del meteorito al Sol desde un punto P de su trayectoria cuya abscisa es x. (3 *puntos*).

b) El punto P de la trayectoria T donde el meteorito alcanza la distancia mínima al Sol. (5 *puntos*).

c) Distancia mínima del meteorito al Sol (2 *puntos*).

Nota. En los tres resultados sólo se dará la expresión algebraica o el valor numérico obtenido, sin mencionar la unidad de medida por no haber sido indicada en el enunciado.

Solución: a) $\sqrt{x^2+2x+9}$. b) $\left(-1,\sqrt{7}\right)$. c) $\sqrt{8}$.

OPCIÓN B

Problema B.1. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 4 & 2 & -2\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\ 0 & -1 & 5\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$, obtener **razonadamente** el valor de los determinantes siguientes, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

d) $|A+B|$ y $\left|\frac{1}{2}(A+B)^{-1}\right|$. (4 *puntos*).

e) $|(A+B)^{-1}A|$ y $|A^{-1}(A+B)|$ (3 *puntos*).

f) $|2ABA^{-1}|$ y $|A^3B^{-1}|$ (3 *puntos*).

Solución: a) $|A+B|=24$ y $\left|\frac{1}{2}(A+B)^{-1}\right|=\frac{1}{2^3}\frac{1}{24}=5{,}2083\times 10^{-3}$. b) $|(A+B)^{-1}A|=\frac{4}{24}=\frac{1}{6}=0{,}1666...$ y $|A^{-1}(A+B)|=\frac{24}{4}=6$. c) $|2ABA^{-1}|=-32$ y $|A^3B^{-1}|=-16$.

Problema B.2. Dados los puntos A = (1, 0, 1), B = (2, –1, 0), C = (0, 1, 1) y P = (0, –3, 2), se pide calcular **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La distancia del punto P al punto A. (2 *puntos*)
b) La distancia del punto P a la recta que pasa por los puntos A y B. (4 *puntos*)
c) La distancia del punto P al plano que pasa por los puntos A, B y C. (4 *puntos*)

Solución: a) $\sqrt{11}=3{,}3166...$; b) $\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=3{,}2669...$; c) $\frac{4}{\sqrt{2}}=2{,}8284...$

Problema B.3. Dada la función f definida por $f(x)$ = sen x, para cualquier valor real x, se pide obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La ecuación de la recta tangente a la curva $y=f(x)$ en el punto de abscisa $x=\pi/6$. (4 *puntos*).
b) La ecuación de la recta normal a la curva $y=f(x)$ en el punto de abscisa $x=\pi/3$. Se recuerda que la recta normal a una curva en un punto P es la recta que pasa por ese punto P y es perpendicular a la recta tangente a la curva en el punto P. (3 *puntos*).
c) El ángulo formado por las rectas determinadas en los apartados a) y b). (3 *puntos*).

Solución: a) $y-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$; b) $y-\frac{\sqrt{3}}{2}=-2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$;

c) $\pi-\arctan\frac{\sqrt{3}}{2}-\arctan 2=1.3207\cdots rad=75.67\cdots^{\text{o}}$.

Se admitirá $\arctan\frac{\sqrt{3}}{2}+\arctan 2=1.8209\cdots rad=104.32\cdots^{\text{o}}$.