COMISSIÓ GESTORA DE LES PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT
COMISIÓN GESTORA DE LAS PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

SISTEMA UNIVERSITARI VALENCIÀ
SISTEMA UNIVERSITARIO VALENCIANO

PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

CONVOCATÒRIA: JUNY 2015	CONVOCATORIA: JUNIO 2015
MATEMÀTIQUES II	MATEMÁTICAS II

CRITERIS DE CORRECCIÓ / CRITERIOS DE CORRECCIÓN
Cal elegir sols UNA de les dues OPCIONS, A o B, i s'han de fer els tres problemes d'aquesta opció.
Cada problema puntua fins a 10 punts.
La qualificació de l'exercici és la suma de les qualificacions de cada problema dividida entre 3, i aproximada a les centèsimes.
Els resultats analítics, numèrics i gràfics han d'estar sempre degudament justificats.

Se elegirá solamente UNA de las dos OPCIONES, A o B, y se han de hacer los tres problemas de esa opción.
Cada problema se puntuará hasta 10 puntos.
La calificación del ejercicio será la suma de las calificaciones de cada problema dividida entre 3 y aproximada a las centésimas.
Los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.

OPCIÓ A

Problema A.1. Es donen les matrius $A=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 2 & 2\end{pmatrix}$ i $B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & -2\end{pmatrix}$. Obteniu **raonadament**, **escrivint tots els passos del raonament utilitzat**:

a) La matriu inversa de la matriu A. (2 *punts*)

b) Las matrius X i Y d'ordre 2×2 tals que $XA=B$ i $AY=B$. (2 + 2 *punts*)

c) **Justifiqueu raonadament** que si M és una matriu quadrada tal que $M^2=I$, on I és la matriu identitat del mateix ordre que M, llavors es verifica la igualtat $M^3=M^7$. (4 *punts*)

Solució. a) $A^{-1}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}2 & 3\\ -2 & 1\end{pmatrix}$. b) $X=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 4 & 2\end{pmatrix}$ i $Y=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$. c) $M^7=M^3M^2M^2=M^3II=M^3$.

Problema A.2. Obteniu **raonadament**, **escrivint tots els passos del raonament utilitzat**:

a) L'equació del pla π que passa pel punt $P(2,0,1)$ i és perpendicular a la recta
$r:\begin{cases}x+2y=0\\ z=0\end{cases}$. (3 *punts*)

b) Les coordenades del punt Q situat en la intersecció de la recta r i del pla π. (2 *punts*)

c) La distància del punt P a la recta r, (3 *punts*),
i **justifiqueu raonadament** que la distància del punt P a un punt qualsevol de la recta r és major o igual que $\frac{3\sqrt{5}}{5}$. (2 *punts*)

Solució. a) $\pi: 2x-y-4=0$. b) $Q=(8/5,-4/5,0)$. c) $d(P,r)=d(P,Q)=\frac{3\sqrt{5}}{5}$ i per mètode analític directe o pel teorema de Pitàgores s'obté que si S és un punt de r diferent de Q, $d(P,Q)<d(P,S)$, ja que el triangle PQS és rectangle, llavors la hipotenusa PS té major longitud que el catet PQ. S'admetrà la indicació que la distància d'un punt P a una recta r és el mínim de les distàncies de P als punts de r.

Problema A.3. Obteniu **raonadament**, **escrivint tots els passos del raonament utilitzat**:

a) Els intervals de creixement i de decreixement de la funció real *f* definida per $f(x)=(x-1)(x-3)$, sent *x* un nombre real. (3 *punts*)

b) L'àrea del recinte fitat limitat entre les corbes $y=(x-1)(x-3)$ i $y=-(x-1)(x-3)$. (4 *punts*)

c) El valor positiu de *a* per al qual l'àrea limitada entre la corba $y=a(x-1)(x-3)$, l'eix Y i el segment que uneix els punts $(0,0)$ i $(1,0)$ és 4/3. (3 *punts*)

Solució. a) Creix si $x>2$ i decreix si $x<2$. b) $8/3$. c) $a=1$.

OPCIÓ B

Problema B.1. Es dóna el sistema d'equacions $\begin{cases} (1-\alpha)x & + & (2\alpha+1)y & + & (2\alpha+2)z & = & \alpha \\ \alpha x & + & \alpha y & & & = & 2\alpha+2 \\ 2x & + & (\alpha+1)y & + & (\alpha-1)z & = & \alpha^2-2\alpha+9 \end{cases}$, on α és un paràmetre real. Obteniu **raonadament**, **escrivint tots els passos del raonament utilitzat**:

a) Totes les solucions del sistema quan $\alpha=1$. (3 *punts*)

b) **La justificació raonada** de si el sistema és compatible o incompatible quan $\alpha=2$. (3 *punts*)

c) Els valors de α per als quals el sistema és compatible i determinat. (4 *punts*)

Solució. a) $(x,\,y,\,z)=\left(4,\,0,\,\frac{1}{4}\right)+\lambda(-1,1,-\frac{3}{4}),\quad \forall\lambda\in R.$ b) Incompatible. c) $\alpha\in R-\{0,1,2\}$.

Problema B.2. Es donen les rectes $r:\begin{cases} x-y+3=0 \\ 2x-z+2=0 \end{cases}$ i $s:\begin{cases} 3y+1=0 \\ x-2z-3=0 \end{cases}$.

Obteniu **raonadament**, **escrivint tots els passos del raonament utilitzat**:

a) El pla paral·lel a la recta *s* que conté la recta *r*. (3 *punts*)

b) La recta *t* que passa pel punt $(0,0,0)$, sabent que un vector director de *t* és perpendicular a un vector director de *r* i també és perpendicular a un vector director de s. (3 *punts*)

c) **Esbrineu raonadament** si existeix o no un pla perpendicular a *s* que continga la recta *r*. (4 *punts*)

Solució. a) $x+3y-2z=5$. b) $(x,\ y,\ z)=\lambda(1,\,3,\,-2)$. c) No, ja que el producte escalar d'un vector director de *r* (qualsevol no nul proporcional a $(1,1,2)$) per un vector director de *s* (qualsevol no nul proporcional a $(2,0,1)$)) no és 0. També s'obté la solució comprovant que en el feix de plans que conté *r* no existeix cap pla perpendicular a s.

Problema B.3. Un poble està situat en el punt $A(0,4)$ d'un sistema de referència cartesià. El tram d'un riu situat al terme municipal del poble descriu la corba $y=\frac{x^2}{4}$, sent $-6\le x\le 6$.

Obteniu **raonadament**, **escrivint tots els passos del raonament utilitzat**:

a) La distància entre un punt $P(x,\,y)$ del riu i el poble en funció de l'abscissa *x* de P. (2 *punts*)

b) El punt o punts del tram del riu situats a distància mínima del poble. (4 *punts*)

c) El punt o punts del tram del riu situats a distància màxima del poble. (4 *punts*)

Solució. a) $\sqrt{x^2+\left(\frac{x^2}{4}-4\right)^2}$. b) $\left(2\sqrt{2},\,2\right)$ i $\left(-2\sqrt{2},\,2\right)$. c) $(6,\,9)$ i $(-6,\,9)$.

OPCIÓN A

Problema A.1. Se dan las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 2 & 2\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & -2\end{pmatrix}$. Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La matriz inversa de la matriz A. (2 *puntos*)

b) Las matrices X e Y de orden 2×2 tales que $XA=B$ y $AY=B$. (2 + 2 *puntos*)

c) **Justificar razonadamente** que si M es una matriz cuadrada tal que $M^2=I$, donde I es la matriz identidad del mismo orden que M, entonces se verifica la igualdad $M^3=M^7$. (4 *puntos*)

Solución. a) $A^{-1}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}2 & 3\\ -2 & 1\end{pmatrix}$. b) $X=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 4 & 2\end{pmatrix}$ e $Y=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$. c) $M^7=M^3M^2M^2=M^3II=M^3$.

Problema A.2. Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La ecuación del plano π que pasa por el punto $P(2, 0, 1)$ y es perpendicular a la recta $r:\begin{cases}x+2y=0\\ z=0\end{cases}$. (3 *puntos*)

b) Las coordenadas del punto Q situado en la intersección de la recta r y del plano π. (2 *puntos*)

c) La distancia del punto P a la recta r, (3 *puntos*), y **justificar razonadamente** que la distancia del punto P a un punto cualquiera de la recta r es mayor o igual que $\frac{3\sqrt{5}}{5}$. (2 *puntos*)

Solución. a) $\pi: 2x-y-4=0$. b) $Q=(8/5, -4/5, 0)$. c) $d(P,r)=d(P,Q)=\frac{3\sqrt{5}}{5}$ y por método analítico directo o por el teorema de Pitágoras se obtiene que si S es un punto de r distinto de Q, $d(P,Q)<d(P,S)$, pues el triángulo PQS es rectángulo, luego la hipotenusa PS tiene mayor longitud que el cateto PQ. Se admitirá la indicación de que la distancia de un punto P a una recta r es el mínimo de las distancias de P a los puntos de r.

Problema A.3. Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función real f definida por $f(x)=(x-1)(x-3)$, siendo x un número real. (3 *puntos*)

b) El área del recinto acotado limitado entre las curvas $y=(x-1)(x-3)$ e $y=-(x-1)(x-3)$. (4 *puntos*)

c) El valor positivo de a para el cual el área limitada entre la curva $y=a(x-1)(x-3)$, el eje Y y el segmento que une los puntos $(0, 0)$ y $(1, 0)$ es 4/3. (3 *puntos*)

Solución. a) Crece si $x>2$ y decrece si $x<2$. b) $8/3$. c) $a=1$.

OPCIÓN B

Problema B.1. Se da el sistema de ecuaciones $\begin{cases}(1-\alpha)x + (2\alpha+1)y + (2\alpha+2)z = \alpha\\ \alpha x + \alpha y = 2\alpha+2\\ 2x + (\alpha+1)y + (\alpha-1)z = \alpha^2-2\alpha+9\end{cases}$,

donde α es un parámetro real. Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Todas las soluciones del sistema cuando $\alpha=1$. (3 *puntos*)

b) **La justificación razonada** de si el sistema es compatible o incompatible cuando $\alpha = 2$. (3 *puntos*)

c) Los valores de α para los que el sistema es compatible y determinado. (4 *puntos*)

Solución. a) $(x,\, y,\, z) = \left(4,\, 0,\, \frac{1}{4}\right) + \lambda(-1, 1, -\frac{3}{4}), \quad \forall \lambda \in R.$ b) Incompatible. c) $\alpha \in R - \{0, 1, 2\}$.

Problema B.2. Se dan las rectas $r: \begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ 2x - z + 2 = 0 \end{cases}$ y $s: \begin{cases} 3y + 1 = 0 \\ x - 2z - 3 = 0 \end{cases}$.

Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) El plano paralelo a la recta *s* que contiene a la recta *r*. (3 *puntos*)

b) La recta *t* que pasa por el punto $(0, 0, 0)$, sabiendo que un vector director de *t* es perpendi– cular a un vector director de *r* y también es perpendicular a un vector director de *s*. (3 *puntos*)

c) **Averiguar razonadamente** si existe o no un plano perpendicular a *s* que contenga a la recta *r*. (4 *puntos*)

Solución. a) $x + 3y - 2z = 5$. b) $(x,\, y,\, z) = \lambda(1, 3, -2)$. c) No, pues el producto escalar de un vector director de *r* (cualquiera no nulo proporcional a $(1, 1, 2)$) por un vector director de *s* (cualquiera no nulo proporcional a $(2, 0, 1)$)) no es 0. También se obtiene la solución comprobando que en el haz de planos que contiene a *r* no existe ningún plano perpendicular a *s*.

Problema B.3. Un pueblo está situado en el punto $A(0, 4)$ de un sistema de referencia cartesiano. El tramo de un río situado en el término municipal del pueblo describe la curva $y = \frac{x^2}{4}$, siendo $-6 \le x \le 6$.

Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La distancia entre un punto $P(x,\, y)$ del río y el pueblo en función de la abscisa *x* de *P*. (2 *puntos*)

b) El punto o puntos del tramo del río situados a distancia mínima del pueblo. (4 *puntos*)

c) El punto o puntos del tramo del río situados a distancia máxima del pueblo. (4 *puntos*)

Solución. a) $\sqrt{x^2 + \left(\frac{x^2}{4} - 4\right)^2}$. b) $\left(2\sqrt{2}, 2\right)$ y $\left(-2\sqrt{2}, 2\right)$. c) $(6, 9)$ y $(-6, 9)$.