PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

CONVOCATÒRIA: JULIOL 2015	CONVOCATORIA: JULIO 2015
MATEMÀTIQUES II	MATEMÁTICAS II

CRITERIS DE CORRECCIÓ / CRITERIOS DE CORRECCIÓN

Cal elegir sols UNA de les dues OPCIONS, A o B, i s'han de fer els tres problemes d'aquesta opció.
Cada problema puntua fins a 10 punts.
La qualificació de l'exercici és la suma de les qualificacions de cada problema dividida entre 3, i aproximada a les centèsimes.
Els resultats analítics, numèrics i gràfics han d'estar sempre degudament justificats.

Se elegirá solamente UNA de las dos OPCIONES, A o B, y se han de hacer los tres problemas de esa opción.
Cada problema se puntuará hasta 10 puntos.
La calificación del ejercicio será la suma de las calificaciones de cada problema dividida entre 3 y aproximada a las centésimas.
Los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.

OPCIÓ A

Problema A.1. Es dóna el sistema d'equacions $\begin{cases} x + 3y + z = \alpha \\ x + y - \alpha z = 1 \\ 2x + \alpha y - z = 2\alpha + 3 \end{cases}$, on α és un paràmetre real.

Obteniu **raonadament**, **escrivint tots els passos del raonament utilitzat**:

a) La solució del sistema quan $\alpha = -1$. (3 *punts*)

b) Totes les solucions del sistema quan $\alpha = 0$. (3 *punts*)

c) El valor de α per al qual el sistema és incompatible. (4 *punts*)

Solució. a) $\left(\frac{2}{3}, -1, \frac{4}{3}\right)$. b) $\left(\frac{\lambda}{2} + \frac{3}{2},\ -\frac{\lambda}{2} - \frac{1}{2},\ \lambda\right)$. c) $\alpha = 5$.

Problema A.2. Es tenen les rectes $r: \frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{2}$, $s: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -\lambda \\ z = 0 \end{cases}$ i el punt $P(0, 3, -2)$. Obteniu **raonadament**, **escrivint tots els passos del raonament utilitzat**:

a) Les equacions de la recta que passa pel punt P i és paral·lela a la recta r. (3 *punts*)

b) L'equació del pla que conté la recta r i és paral·lel a la recta s. (4 *punts*)

c) La distància entre les rectes r i s. (3 *punts*)

Solució. a) $\frac{x}{3} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+2}{2}$. b) $x + y - z = 0$. c) $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Problema A.3. Es dóna la funció f definida per $f(x) = \frac{x}{(x+1)^2}$. Obteniu **raonadament**, **escrivint tots els passos del raonament utilitzat**:

a) El domini i les asímptotes de la funció f. (3 *punts*)

b) Els intervals de creixement i de decreixement de la funció f. (4 *punts*)

c) La integral $\int \frac{x}{(x+1)^2}\,dx$. (3 *punts*)

Solució. a) $]-\infty,-1[\cup]-1,+\infty[$, $y=0$ i $x=-1$. b) Decreix en $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ i creix en $]-1,\ 1[$. c) $\ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + C$, sent C una constant arbitrària. S'admet com a vàlida la solució $\ln(x+1) + \frac{1}{x+1} + C$.

OPCIÓ B

Problema B.1. Es donen les matrius $A=\begin{pmatrix} x & 1 & -1 \\ y & 2 & 3 \\ z & 1 & 0 \end{pmatrix}$ i $B=\begin{pmatrix} x & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Obteniu **<u>raonadament</u>**, **<u>escrivint tots els passos del raonament utilitzat</u>**:

a) Els valors de x per als quals la matriu B té inversa. (3 punts)

b) El valor del determinant de les matrius A^3 i $\begin{pmatrix} 2x & 5 & -1 \\ 2y & 10 & 3 \\ 2z & 5 & 0 \end{pmatrix}$, sabent que el valor del determinant de la matriu A és 8. (4 punts)

c) Els valors de $x,\ y,\ z$ per als quals $A^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 3 & 7 & 6 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. (3 punts)

Solució. a) $x \neq -\frac{1}{3}$. b) $8^3=512$ i $2\times5\times8=80$. c) De $A^2=\begin{pmatrix} x^2+y-z & x+1 & -x+3 \\ xy+2y+3z & y+7 & -y+6 \\ xz+y & z+2 & -z+3 \end{pmatrix}$ es dedueix que $(x,\ y,\ z)=(-1,\ 0,\ 1)$.

Problema B.2. Es donen les rectes $r:\begin{cases} 2x - y + 5 = 0 \\ 6x - z + 8 = 0 \end{cases}$, $s:\begin{cases} x=1-2\alpha \\ y=2+\alpha \\ z=3-\alpha \end{cases}$ i el pla $\pi: 2x+mz+1=0$, sent m un paràmetre real. Obteniu **<u>raonadament</u>**, **<u>escrivint tots els passos del raonament utilitzat</u>**:

a) La posició relativa de les rectes r i s i el punt (o punts) comuns a r i s. (4 *punts*)
b) El valor del paràmetre m perquè la recta s siga paral·lela al pla π. (3 *punts*)
c) L'equació del pla que conté la recta s i el punt $P\ (1,\ 2,\ 4)$. (3 *punts*)

Solució. a) Es tallen en el punt $r\cap s=\{(-1,\ 3,\ 2)\}$. b) $m=-4$. c) $(x,y,z)=(1,2,3)+\alpha(-2,1,-1)+\beta(0,0,1)$, amb α i β paràmetres reals; l'equació implícita és $x+2y-5=0$.

Problema B.3. Es vol construir un dipòsit de $1500\,m^3$ de capacitat, amb forma de caixa oberta per la part superior. La base és, doncs, un quadrat i les parets laterals són quatre rectangles iguals perpendiculars a la base. El preu de cada m^2 de la base és de 15 € i el preu de cada m^2 de paret lateral és de 5 €.
Obteniu **<u>raonadament</u>**, **<u>escrivint tots els passos del raonament utilitzat</u>**:

a) El cost total del dipòsit en funció de la longitud x d'un costat de la base. (3 *punts*)
b) Les longituds del costat de la base i de l'altura del dipòsit perquè aquest cost total siga mínim. (5 *punts*)

c) El valor del mínim cost total del dipòsit. (2 *punts*)

Solució. a) $15\left(x^2+\dfrac{2000}{x}\right)$. b) $x=10\,m$ i l'altura $15\,m$. c) 4500 €.

OPCIÓN A

Problema A.1. Se da el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x + 3y + z = \alpha \\ x + y - \alpha z = 1 \\ 2x + \alpha y - z = 2\alpha+3 \end{cases}$, donde α es un parámetro real. Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La solución del sistema cuando $\alpha=-1$. (3 *puntos*)

b) Todas las soluciones del sistema cuando $\alpha=0$. (3 *puntos*)

c) El valor de α para el que el sistema es incompatible. (4 *puntos*)

Solución. a) $\left(\dfrac{2}{3},-1,\dfrac{4}{3}\right)$. b) $\left(\dfrac{\lambda}{2}+\dfrac{3}{2},\ -\dfrac{\lambda}{2}-\dfrac{1}{2},\ \lambda\right)$. c) $\alpha=5$.

Problema A.2. Se tienen las rectas $r:\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z}{2}$, $s:\begin{cases} x=1+\lambda \\ y=\ -\lambda \\ z=0 \end{cases}$ y el punto $P\,(0,3,-2)$. Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Las ecuaciones de la recta que pasa por el punto P y es paralela a la recta r. (3 *puntos*)

b) La ecuación del plano que contiene a la recta r y es paralelo a la recta s. (4 *puntos*)

c) La distancia entre las rectas r y s. (3 *puntos*)

Solución. a) $\dfrac{x}{3}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z+2}{2}$. b) $x+y-z=0$. c) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Problema A.3. Se da la función f definida por $f(x)=\dfrac{x}{(x+1)^2}$. Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) El dominio y las asíntotas de la función f. (3 *puntos*)

b) Los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función f. (4 *puntos*)

c) La integral $\displaystyle\int \frac{x}{(x+1)^2}\,dx$. (3 *puntos*)

Solución. a) $]-\infty,-1[\cup]-1,+\infty[$, $y=0$ y $x=-1$. b) Decrece en $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ y crece en $]-1,\ 1[$. c) $\ln|x+1| + \dfrac{1}{x+1}+C,$ siendo C una constante arbitraria. Se admite como válida la solución $\ln(x+1) + \dfrac{1}{x+1}+C.$

OPCIÓN B

Problema B.1. Se dan las matrices $A=\begin{pmatrix} x & 1 & -1 \\ y & 2 & 3 \\ z & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} x & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Los valores de x para los cuales la matriz B tiene inversa. (3 puntos)

b) El valor del determinante de las matrices A^3 y $\begin{pmatrix} 2x & 5 & -1 \\ 2y & 10 & 3 \\ 2z & 5 & 0 \end{pmatrix}$, sabiendo que el valor del determinante de la matriz A es 8. (4 puntos)

c) Los valores de x, y, z para los cuales $A^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 3 & 7 & 6 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. (3 puntos)

Solución. a) $x \neq -\frac{1}{3}$. b) $8^3=512$ y $2\times 5\times 8=80$. c) De $A^2=\begin{pmatrix} x^2+y-z & x+1 & -x+3 \\ xy+2y+3z & y+7 & -y+6 \\ xz+y & z+2 & -z+3 \end{pmatrix}$ se deduce que $(x, y, z)=(-1, 0, 1)$.

Problema B.2. Se dan las rectas $r:\begin{cases} 2x - y + 5 = 0 \\ 6x - z + 8 = 0 \end{cases}$, $s:\begin{cases} x=1-2\alpha \\ y=2+\alpha \\ z=3-\alpha \end{cases}$ y el plano $\pi: 2x+mz+1=0$, siendo m un parámetro real. Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La posición relativa de las rectas r y s y el punto (o puntos) comunes a r y s. (4 *puntos*)

b) El valor del parámetro m para que la recta s sea paralela al plano π. (3 *puntos*)

c) La ecuación del plano que contiene a la recta s y al punto $P\ (1, 2, 4)$. (3 *puntos*)

Solución. a) Se cortan en el punto $r\cap s=\{(-1, 3, 2)\}$. b) $m=-4$. c) $(x, y, z)=(1,2,3)+\alpha(-2,1,-1)+\beta(0,0,1)$, con α y β parámetros reales; la ecuación implícita es $x+2y-5=0$.

Problema B.3. Se va a construir un depósito de $1500\, m^3$ de capacidad, con forma de caja abierta por la parte superior. Su base es pues un cuadrado y las paredes laterales son cuatro rectángulos iguales perpendiculares a la base. El precio de cada m^2 de la base es de 15 € y el precio de cada m^2 de pared lateral es de 5 €.
Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) El coste total del depósito en función de la longitud x de un lado de su base. (3 *puntos*)

b) Las longitudes del lado de la base y de la altura del depósito para que dicho coste total sea mínimo. (5 *puntos*)

c) El valor del mínimo coste total del depósito. (2 *puntos*)

Solución. a) $15\left(x^2+\frac{2000}{x}\right)$. b) $x=10\, m$ y la altura $15\, m$. c) 4500 €.