GENERALITAT VALENCIANA
CONSELLERIA D'EDUCACIÓ, INVESTIGACIÓ, CULTURA I ESPORT

COMISSIÓ GESTORA DE LES PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT
COMISIÓN GESTORA DE LAS PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

SISTEMA UNIVERSITARI VALENCIÀ
SISTEMA UNIVERSITARIO VALENCIANO

PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT — PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

CONVOCATÒRIA: JULIOL 2016	CONVOCATORIA: JULIO 2016
Assignatura: MATEMÀTIQUES II	Asignatura: MATEMÁTICAS II

CRITERIS DE CORRECCIÓ / CRITERIOS DE CORRECCIÓN

Cal elegir sols UNA de les dues OPCIONS, A o B, i s'han de fer els tres problemes d'aquesta opció.
Cada problema puntua fins a 10 punts.
La qualificació de l'exercici és la suma de les qualificacions de cada problema dividida entre 3, i aproximada a les centèsimes.
Els resultats analítics, numèrics i gràfics han d'estar sempre degudament justificats.

Se elegirá solamente UNA de las dos OPCIONES, A o B, y se han de hacer los tres problemas de esa opción.
Cada problema se puntuará hasta 10 puntos.
La calificación del ejercicio será la suma de las calificaciones de cada problema dividida entre 3 y aproximada a las centésimas.
Los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.

OPCIÓ A

Problema A.1. Es dóna el sistema $\begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ -3x + 2y + 3z = -2 \\ 2x + \alpha y - 5z = -4 \end{cases}$, on α és un paràmetre real.

Obteniu **raonadament**, **escrivint tots els passos del raonament utilitzat**:

a) La solució del sistema quan $\alpha = 0$. (3 *punts*)
b) El valor del paràmetre α per al qual el sistema és incompatible. (3 *punts*)
c) Els valors del paràmetre α per als quals el sistema és compatible i determinat, (2 *punts*)
i obteniu la solució del sistema en funció del paràmetre α. (2 *punts*)

Solució: a) $(26/27,\ -4/3,\ 32/27)$. b) $\alpha = -3$. c) $\alpha \neq -3$; $\left(\dfrac{10\alpha+26}{9\alpha+27}, \dfrac{-4}{\alpha+3}, \dfrac{4\alpha+32}{9\alpha+27}\right)$.

Problema A.2. Es donen els punts $A = (0, 0, 1)$, $B = (1, 0, –1)$, $C = (0, 1, –2)$ i $D = (1, 2, 0)$.
Obteniu **raonadament**, **escrivint tots els passos del raonament utilitzat**:

a) L'equació del pla π que conté els punts A, B i C. (3 *punts*)
b) La justificació que els quatre punts A, B, C i D, no són coplanaris. (2 *punts*)
c) La distància del punt D al pla π, (2 *punts*)
i el volum del tetraedre els vèrtexs del qual són A, B, C i D. (3 *punts*)

Solució: a) $\pi: -2x - 3y - z + 1 = 0$. b) $-2(1) - 3(2) - 0 + 1 \neq 0$. c) $\dfrac{\sqrt{14}}{2}$; $\dfrac{7}{6}$.

Problema A.3. Es dóna la funció f definida per $f(x) = x^2 + |x|$, on x és un nombre real qualsevol i $|x|$ representa el valor absolut de x. Obteniu **raonadament**, **escrivint tots els passos del raonament utilitzat**:

a) El punt o punts on la gràfica de la funció f talla els eixos de coordenades. (2 *punts*)
b) La justificació que la corba $y = f(x)$ és simètrica respecte a l'eix d'ordenades. (1 *punts*)
c) Els intervals de creixement i de decreixement de la funció f, (2 *punts*)
i l'extrem relatiu de la funció f, justificant si és màxim o mínim relatiu. (1 *punt*)
d) La representació gràfica d'aquesta corba $y = f(x)$. (1 *punt*)
e) Les integrals definides $\int_{-1}^{0} f(x)dx$ y $\int_{0}^{2} f(x)dx$. (1,5 + 1,5 *punts*)

Solució: a) La gràfica de f talla l'eix d'abscisses en $(0, 0)$ i aquesta gràfica també talla a l'eix d'ordenades en

$(0, 0)$. b) $f(-x) = (-x)^2 + |-x| = x^2 + |x| = f(x)$. c) És creixent quan $x \geq 0$ i, per simetria, és decreixent si $x \leq 0$, la qual cosa es dedueix també del decreixement de la funció $h(x) = x^2 - x$ quan $x \leq 0$, ja que $f(x) = h(x)$ quan $x \leq 0$; té un mínim relatiu en $x = 0$. d) En ser *f* simètrica respecte a l'eix d'ordenades, n'hi ha prou amb obtenir la gràfica de *f* quan $x \geq 0$, on $f(x) = x^2 + x$. La gràfica de *f* per a $x \leq 0$ s'obté per simetria respecte a l'eix d'ordenades de la gràfica obtinguda per a $x \geq 0$, encara que també es pot obtenir representant $h(x) = x^2 - x$ quan $x \leq 0$, ja que, com ja s'ha indicat, $f(x) = h(x)$, quan $x \leq 0$. e) $5/6$ i $14/3$.

OPCIÓ B

Problema B.1. Es donen les matrius $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ i $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Obteniu **raonadament**, **escrivint tots els passos del raonament utilitzat**:

a) El determinant de les matrius $A \cdot (2(B)^2)$ i $A \cdot (2(B)^2) \cdot (3A)^{-1}$. (1,5 *punts*) i (1,5 *punts*)

b) Les matrius A^{-1} i $((B \cdot A)^{-1} \cdot B)^{-1}$. (2 *punts*) i (2 *punts*)

c) La solució de l'equació matricial $A \cdot X + B \cdot X = 3I$. (3 *punts*)

Solució: a) $-1(2^3)(5)^2 = -200$ i $\dfrac{-200}{27(-1)} = \dfrac{200}{27}$. b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ i $((B \cdot A)^{-1} \cdot B)^{-1} = A$.

c) $X = 3(A+B)^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 12 \\ 3 & 2 & -9 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

Problema B.2. Es donen els plans $\pi : x + y + z = 1$ i $\sigma : ax + by + z = 0$, on a i b són dos paràmetres reals. Obteniu **raonadament**, **escrivint tots els passos del raonament utilitzat**:

a) Els valors de a i b per als quals el pla σ passa pel punt $(1, 2, 3)$ i, a més, aquest pla σ és perpendicular al pla π. (3 *punts*)

b) Els valors de a i b per als quals ocorre que el pla σ passa pel punt $(0, 1, 1)$ i la distància del punt $(1, 0, 1)$ al pla σ és 1. (3 *punts*)

c) Els valors de a i b per als quals la intersecció dels plans π i σ és la recta r per a la qual el vector $(3, 2, -5)$ és un vector director d'aquesta recta *r*, (3 *punts*)
i obteniu les coordenades d'un punt qualsevol de la recta *r*. (1 *punt*)

Solució: a) $a = 1$ i $b = -2$. b) $a = 1/2$ i $b = -1$. c) $a = 3$ i $b = -2$ i un punt de *r* és qualsevol solució del sistema $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 3x - 2y + z = 0 \end{cases}$, per exemple $(-1/2, 0, 3/2)$.

Problema B.3. La diferència de potencial *x* entre dos punts d'un circuit elèctric provoca el pas d'un corrent elèctric d'intensitat *y*, que està relacionat amb la diferència de potencial *x* per l'equació $y = -x^2 - x + 6$, sent $0 \leq x \leq 2$. Obtenir **raonadament**, **escrivint tots els passos del raonament utilitzat**:

a) La gràfica de la funció $f(x) = -x^2 - x + 6$ (3 *punts*)
i deduïu, gràficament o analíticament, el valor de la intensitat *y* quan la diferència de potencial *x* és 0 i el valor de la diferència de potencial *x* al qual correspon una intensitat *y* igual a 0, sent $0 \leq x \leq 2$. (1 *punt*)

b) El valor de la diferència de potencial *x* per al qual és màxim el producte $y \cdot x$ de la intensitat *y* per la diferència de potencial *x*, quan $0 \leq x \leq 2$, (2 *punts*)
i obteniu el valor màxim d'aquest producte $y \cdot x$, quan $0 \leq x \leq 2$. (1 *punt*)

c) L'àrea de la superfície situada en el primer quadrant limitada per la corba $y = f(x)$, l'eix d'abscisses i l'eix d'ordenades. (3 *punts*)

Solució: a) La paràbola de vèrtex $(-0.5,\ 6.25)$ que passa pels punts $(-3,\ 0)$, $(0,\ 6)$ i $(2,\ 0)$, sent 6 i 2 els valors demanats de la intensitat i la diferència de potencial, respectivament. b) $x=(-1+\sqrt{19})/3$, producte màxim igual a 4,0607. c) $\dfrac{22}{3}$.

OPCIÓN A

Problema A.1. Se da el sistema $\begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ -3x + 2y + 3z = -2, \\ 2x + \alpha y - 5z = -4 \end{cases}$ donde α es un parámetro real.

Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La solución del sistema cuando $\alpha = 0$. (3 *puntos*)
b) El valor del parámetro α para el que el sistema es incompatible. (3 *puntos*)
c) Los valores del parámetro α para los que el sistema es compatible y determinado (2 *puntos*)
y obtener la solución del sistema en función del parámetro α. (2 *puntos*)

Solución: a) $(26/27,\ -4/3,\ 32/27)$. b) $\alpha=-3$. c) $\alpha \neq 3$; $\left(\dfrac{10\alpha+26}{9\alpha+27}, \dfrac{-4}{\alpha+3}, \dfrac{4\alpha+32}{9\alpha+27}\right)$.

Problema A.2. Se dan los puntos $A = (0, 0, 1)$, $B = (1, 0, –1)$, $C = (0, 1, –2)$ y $D = (1, 2, 0)$.
Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La ecuación del plano π que contiene a los puntos *A*, *B* y *C*. (3 *puntos*)
b) La justificación de que los cuatro puntos *A*, *B*, *C* y *D*, no son coplanarios. (2 *puntos*)
c) La distancia del punto *D* al plano π, (2 *puntos*)
y el volumen del tetraedro cuyos vértices son *A*, *B*, *C* y *D*. (3 *puntos*)

Solución: a) $\pi: -2x-3y-z+1=0$. b) $-2(1)-3(2)-0+1\neq 0$. c) $\dfrac{\sqrt{14}}{2}$; $\dfrac{7}{6}$.

Problema A.3. Se da la función *f* definida por $f(x)=x^2+|x|$, donde *x* es un número real cualquiera y $|x|$ representa al valor absoluto de *x*. Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) El punto o puntos donde la gráfica de la función *f* corta a los ejes de coordenadas. (2 *puntos*)
b) La justificación de que la curva $y=f(x)$ es simétrica respecto al eje de ordenadas. (1 *puntos*)
c) Los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función *f*, (2 *puntos*)
y el extremo relativo de la función *f*, justificando si es máximo o mínimo relativo. (1 *puntos*)
d) La representación gráfica de dicha curva $y=f(x)$. (1 *puntos*)
e) Las integrales definidas $\int_{-1}^{0} f(x)dx$ y $\int_{0}^{2} f(x)dx$. (1,5 + 1,5 *puntos*)

Solución: a) La gráfica de *f* corta al eje de abscisas en $(0, 0)$ y dicha gráfica también corta al eje de ordenadas en $(0, 0)$. b) $f(-x)=(-x)^2+|-x|=x^2+|x|=f(x)$. c) Es creciente cuando $x\geq 0$ y, por simetría, es decreciente si $x\leq 0$, lo que se deduce también del decrecimiento de la función $h(x)=x^2-x$ cuando $x\leq 0$, pues $f(x)=h(x)$ cuando $x\leq 0$; tiene un mínimo relativo en $x=0$. d) Al ser *f* simétrica respecto al eje de ordenadas es suficiente con obtener la gráfica de *f* cuando $x\geq 0$, donde $f(x)=x^2+x$. La gráfica de *f* para $x\leq 0$ se obtiene por simetría respecto al eje de ordenadas de la gráfica obtenida para $x\geq 0$, si bien también se puede obtener representando $h(x)=x^2-x$ cuando $x\leq 0$, pues, como ya se ha indicado, $f(x)=h(x)$, cuando $x\leq 0$. e) $5/6$ y $14/3$.

OPCIÓN B

Problema B.1. Se dan las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 2\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$ e $I=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) El determinante de las matrices $A\cdot(2(B)^2)$ y $A\cdot(2(B)^2)\cdot(3A)^{-1}$. (1,5 *puntos*) y (1,5 *puntos*)

b) Las matrices A^{-1} y $\left((B\cdot A)^{-1}\cdot B\right)^{-1}$. (2 *puntos*) y (2 *puntos*)

c) La solución de la ecuación matricial $A\cdot X+B\cdot X=3I$. (3 *puntos*)

Solución: a) $-1(2^3)(5)^2=-200$ y $\dfrac{-200}{27(-1)}=\dfrac{200}{27}$. b) $A^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 2 & -3\\ 1 & -1 & 2\\ -1 & 1 & -1\end{pmatrix}$ y $\left((B\cdot A)^{-1}\cdot B\right)^{-1}=A$. c)

$X=3(A+B)^{-1}=\begin{pmatrix}-3 & -2 & 12\\ 3 & 2 & -9\\ 0 & 1 & -3\end{pmatrix}$.

Problema B.2. Se dan los planos $\pi: x+y+z=1$ y $\sigma: ax+by+z=0$, donde *a* y *b* son dos parámetros reales.

Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Los valores de *a* y *b* para los que el plano σ pasa por el punto $(1,\ 2,\ 3)$ y, además, dicho plano σ es perpendicular al plano π. (3 *puntos*)

b) Los valores de *a* y *b* para los cuales sucede que el plano σ pasa por el punto $(0,\ 1,\ 1)$ y la distancia del punto $(1, 0, 1)$ al plano σ es 1. (3 *puntos*)

c) Los valores de *a* y *b* para los que la intersección de los planos π y σ es la recta r para la que el vector $(3,\ 2,-5)$ es un vector director de dicha recta *r*, (3 *puntos*)
y obtener las coordenadas de un punto cualquiera de la recta r. (1 *punto*)

Solución: a) $a=1$ y $b=-2$. b) $a=1/2$ y $b=-1$. c) $a=3$ y $b=-2$; un punto de *r* es cualquier solución del sistema $\begin{cases}x+y+z=1\\ 3x-2y+z=0\end{cases}$, por ejemplo $(-1/2,\ 0,\ 3/2)$.

Problema B.3. La diferencia de potencial *x* entre dos puntos de un circuito eléctrico provoca el paso de una corriente eléctrica de intensidad *y*, que está relacionada con la diferencia de potencial *x* por la ecuación $y=-x^2-x+6$, siendo $0\le x\le 2$.

Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La gráfica de la función $f(x)=-x^2-x+6$ (3 *puntos*)
y deducir, gráfica o analíticamente, el valor de la intensidad *y* cuando la diferencia de potencial *x* es 0 y el valor de la diferencia de potencial *x* al que corresponde una intensidad *y* igual a 0, siendo $0\le x\le 2$. (1 *punto*)

b) El valor de la diferencia de potencial *x* para el que es máximo el producto $y\cdot x$ de la intensidad *y* por la diferencia de potencial *x*, cuando $0\le x\le 2$, (2 *puntos*)
y obtener el valor máximo de dicho producto $y\cdot x$, cuando $0\le x\le 2$. (1 *punto*)

c) El área de la superficie situada en el primer cuadrante limitada por la curva $y=f(x)$, el eje de abscisas y el eje de ordenadas. (3 *puntos*)

Solución: a) La parábola de vértice $(-0.5,\ 6.25)$ que pasa por los puntos $(-3,\ 0)$, $(0,\ 6)$ y $(2,\ 0)$, siendo 6 y 2 los valores pedidos de la intensidad y la diferencia de potencial, respectivamente. b) $x=(-1+\sqrt{19})/3$, producto máximo igual a 4,0607. c) $\dfrac{22}{3}$.