Mates II_PAU 2023

Problema 1. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & m & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} m \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$:

a) Estudiar cuándo la ecuación matricial $A^2X = B$ tiene solución en función del parámetro real m. (4 puntos)

b) Encontrar todas las soluciones de la ecuación anterior cuando éstas existan. (6 puntos)

$$A^2X = B$$

a)

- $$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & m & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & m & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2+2m & 2 \\ 0 & m^2+3 & m \\ 0 & 3m & 3 \end{pmatrix}$$

- $$A^2 \cdot X = B \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2+2m & 2 \\ 0 & m^2+3 & m \\ 0 & 3m & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x+2y+2my+2z = m \\ 3y+m^2y+mz = 0 \\ 3my+3z = 9 \end{cases} \rightarrow \overbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2+2m & 2 & m \\ 0 & 3+m^2 & m & 0 \\ 0 & 3m & 3 & 9 \end{array}\right)}^{A^*}$$

A

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2+2m & 2 \\ 0 & 3+m^2 & m \\ 0 & 3m & 3 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 2+2m \\ 0 & 3+m^2 \\ 0 & 3m \end{matrix} = 9 + \cancel{3m^2} - \cancel{3m^2} = 0 \rightarrow$$ No existe solución para ningún valor real de m

b)

$$X = \frac{\begin{vmatrix} m & 2+2m & 2 \\ 0 & 3+m^2 & m \\ 9 & 3m & 3 \end{vmatrix}\begin{matrix} m & 2+2m \\ 0 & 3+m^2 \\ 9 & 3m \end{matrix}}{9} = \frac{9m + \cancel{3m^3} + 18m + \cancel{18m^2} - \cancel{3m^3} - 54 - \cancel{18m^2}}{9} = \frac{27m-54}{9} = \boxed{3m-6}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & m & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 9 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & m \\ 0 & 0 \\ 0 & 9 \end{matrix}}{9} = \frac{-9m}{9} = \boxed{-m}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2+2m & m \\ 0 & 3+m^2 & 0 \\ 0 & 3m & 9 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2+2m \\ 0 & 3+m^2 \\ 0 & 3m \end{matrix}}{9} = \frac{27+9m^2}{9} = \boxed{3+m^2}$$

Problema 2. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha^2 & 0 \end{pmatrix}$:

a) Obtener la matriz $(AB^T + I)^{-1}$, donde I es la matriz identidad de las dimensiones adecuadas para realizar la operación. (6 puntos)

b) Comprobar que $C^2 = -\alpha^3 I$, donde I es la matriz identidad, y calcular C^{13}. (4 puntos)

a) $AB^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

$\underbrace{AB^T + I}_{D} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

$D^{-1} \rightarrow |D| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \rightarrow \exists D^{-1}$ y se calcula $D^{-1} = \frac{\text{Adj} D^T}{|D|}$

$\text{Adj} D = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Adj} D^t = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow D^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}}{-4} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & -3/4 \end{pmatrix}}$

b) $C^2 = -\alpha^3 I$ y C^{13}

- $C^2 = C \cdot C = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha^2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha^3 & 0 \\ 0 & -\alpha^3 \end{pmatrix}$
- $-\alpha^3 \cdot I = -\alpha^3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha^3 & 0 \\ 0 & -\alpha^3 \end{pmatrix}$

$\boxed{C^2 = -\alpha^3 \cdot I}$

$\rightarrow C^{13} = (C^2)^6 \cdot C = (-\alpha^3 \cdot I)^6 \cdot C = \alpha^{18} \cdot \underbrace{I \cdot C}_{C} = \alpha^{18} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha^2 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & \alpha^{19} \\ -\alpha^{20} & 0 \end{pmatrix}}$

Problema 3. Dada la recta $r: \begin{cases} x - y = 1 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$ y los puntos $P = (0,0,3)$ y $Q = (2,2,a)$, obtener:

a) Los valores del parámetro real a, si existen, para los que son paralelas la recta r y la recta que pasa por los puntos P y Q. (6 puntos)

b) La ecuación del plano perpendicular a r y que pasa por P. (4 puntos)

$$r: \begin{cases} x - y = 1 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases} \begin{array}{l} \longrightarrow y = \lambda \longrightarrow x = 1 + \lambda \\ \longrightarrow 1 + \lambda + 2\lambda + z = 0 \longrightarrow z = -1 - 3\lambda \end{array} \left.\begin{array}{l} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 - 3\lambda \end{array}\right\}$$

$$P_r = (1, 0, -1) \quad \vec{v_r} = (1, 1, -3)$$

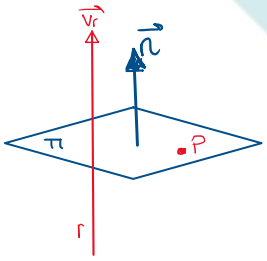
a) $\vec{PQ} = Q - P = (2, 2, a-3) \longrightarrow s: \begin{cases} P = (0,0,3) \\ \vec{PQ} = (2, 2, a-3) = \vec{v_s} \end{cases}$

Para que r y s sean paralelas:

$$\frac{\vec{v_r}}{\vec{v_s}} \longrightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{-3}{a-3} \longrightarrow \frac{1}{2} = \frac{-3}{a-3} \longrightarrow a - 3 = -6 \longrightarrow \boxed{a = -3}$$

r y s serán paralelas cuando $\boxed{a = -3}$

b)



$\pi \perp r \longrightarrow \vec{n} = \vec{v_r}$

$$\pi \equiv \begin{cases} P = (\overset{x}{0}, \overset{y}{0}, \overset{z}{3}) \\ \vec{v_r} = (\underset{A}{1}, \underset{B}{1}, \underset{C}{-3}) = \vec{n} \end{cases}$$

$\pi \equiv Ax + By + Cz + D$

$1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 3(-3) + D = 0 \rightarrow D = 9$

$$\boxed{\pi \equiv x + y - 3z + 9 = 0}$$

Problema 4. Dada la recta $r: \begin{cases} 5x + y + 7z = 16 \\ 9x - y + 7z = 12 \end{cases}$ y el punto $P = (0,5,2)$ se pide:

a) Comprobar que el punto $Q = (2,6,0)$ pertenece a la recta r y encontrar la recta s que pasa por los puntos P y Q. (2 puntos)

b) Obtener el ángulo que forman la recta r y la recta s. (3 puntos)

c) Obtener la proyección ortogonal del punto P en la recta r. (5 puntos)

$$r: \begin{cases} 5x+y+7z=16 \\ 9x-y+7z=12 \end{cases} \longrightarrow \begin{array}{r} 5x+y+7z=16 \\ -\ 9x-y+7z=12 \\ \hline -4x+2y \quad =4 \end{array} \longrightarrow y=\frac{4+4x}{2}=2+2x \qquad \begin{cases} x=\lambda \\ y=2+2\lambda \\ z=2-\lambda \end{cases}$$

$$\longrightarrow z=\frac{9\lambda-(2+2\lambda)-12}{7}=\frac{14-7\lambda}{7}$$

a) $P_r=(0,2,2) \quad \vec{v_r}=(1,2,-1) \quad \vec{PQ}=Q-P=(2,1,-2)$

$$\rightarrow Q\in r \Rightarrow Q=(\overset{x}{2},\overset{y}{6},\overset{z}{0}) \longrightarrow \begin{cases} 2=\lambda & \longrightarrow \lambda=2 \\ 6=2+2\lambda & \longrightarrow 6=6 \checkmark \\ 0=2-\lambda & \longrightarrow 0=0 \checkmark \end{cases}$$

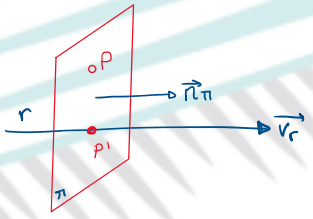
se cumple la igualdad y por tanto $Q\in r$

$$\rightarrow s \text{ pasa por } P \text{ y } Q \longrightarrow \begin{cases} P=(0,5,2) \\ \vec{PQ}=(2,1,-2)=\vec{v_s} \end{cases} \qquad \boxed{s\equiv} \begin{cases} x=2\alpha \\ y=5+\alpha \\ z=2-2\alpha \end{cases} \quad \alpha\in\mathbb{R}$$

b) ángulo entre dos rectas $\rightarrow \alpha=\cos^{-1}\dfrac{|\vec{v_r}\cdot\vec{v_s}|}{|\vec{v_r}|\cdot|\vec{v_s}|}$

$$\boxed{\alpha=}\ \frac{2}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{9}}=\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)\simeq \boxed{35'26^\circ}$$

c) $P=(0,5,2) \qquad r\equiv\begin{cases} x=\lambda \\ y=2+2\lambda \\ z=2-\lambda \end{cases}$



$$\pi\equiv\begin{cases} P=(0,5,2) \\ \vec{v_r}=(1,2,-1) \end{cases} \qquad Ax+By+Cz+D=0$$

$$0+10-2+D=0 \rightarrow D=-8 \qquad \pi\equiv x+2y-z-8=0$$

$$P'=P\cap\pi \rightarrow \lambda+2(2+2\lambda)-(2-\lambda)-8=0$$

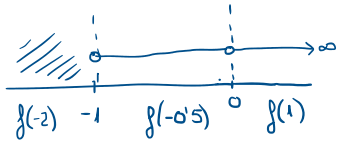
$$\lambda+4+4\lambda-2+\lambda-8=0 \longrightarrow \lambda=\frac{6}{6}=1 \qquad P'=\begin{cases} x=1 \\ y=2+2\cdot 1 \\ z=2+1 \end{cases}$$

$$\rightarrow P'=(1,4,1)$$

Problema 5. Considerar la función $f(x) = \frac{1}{x} + ln(x+1)$. Obtener:

a) El dominio y las asíntotas de $f(x)$. (2 puntos)
b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ y sus máximos y mínimos. (4 puntos)
c) El área comprendida entre la curva $y = f(x)$ y las rectas $y = 0, x = 1$ y $x = 2$. (4 puntos)

a) Ptos que anulan la función $\longrightarrow x = 0$
$\longrightarrow x+1=0 \rightarrow x=-1$



- Dom $f(x) = (-1,0) \cup (0,+\infty)$

- Asíntotas: $\boxed{A.V.} \rightarrow$ Hay dos asíntotas verticales en $x=0$, $x=-1$.

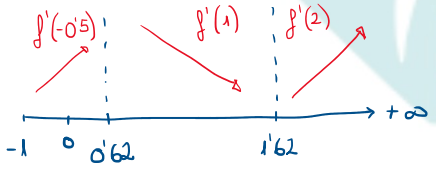
$\boxed{A.H} \rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} + Ln(x+1) = \infty \rightarrow \nexists$ A.H.

$\boxed{AO} \rightarrow y = mx+n$

$m: \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x} + Ln(x+1)}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{ind} \xrightarrow{L'H} \lim_{x\to+\infty} \frac{-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x+1}}{1} = \infty \rightarrow \nexists$ A.O

b) Ptos relativos $\rightarrow f'(x) = 0$

$f'(x) = \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x+1} = -x-1+x^2 = 0 \rightarrow x = 1'62$
$\rightarrow x = 0'62$



$\boxed{\text{Intervalos:}}$ La $f(x)$ crece $(-1,0)\cup(0,0'62)\cup(1'62,+\infty)$
La $f(x)$ decrece $(0'62, 1'62)$

$\boxed{\text{Ptos rel:}}$ $P_{mín} = (1'62, 1'58)$
$P_{máx} = (0'62, 2'1)$

c) ¿área? e $y=0$, $x=1$, $x=2$ Los ptos $x=0$, $x=-1$ están fuera del intervalo pedido

$$\int_1^2 \frac{1}{x} + Ln(x+1)\,dx =$$

$$\hookrightarrow \int Ln|x+1|\,dx = \left\{ \begin{array}{l} t = x+1 \longrightarrow x = t-1 \\ \qquad\qquad\qquad \downarrow \\ \qquad\qquad\qquad dx = 1\,dt \end{array} \right\}$$

$$\int Lnt \cdot dt = \left\{ \begin{array}{l} u = Lnt \longrightarrow du = \frac{1}{t} \\ dv = dt \longrightarrow v = t \end{array} \right\}$$

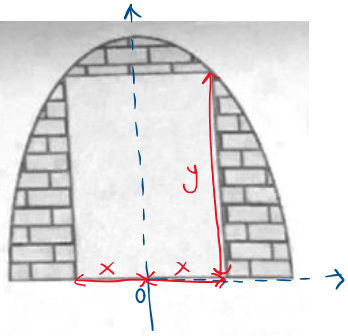
$$= t\,\text{Ln}t - \int \cancel{t}\cdot\frac{1}{\cancel{t}}\,dt = t\,\text{Ln}t - t + C \quad \rightarrow \quad t = x+1 \quad = (x+1)\cdot\text{Ln}|x+1| - (x+1) + C$$

$$\rightarrow \int_1^2 \frac{1}{x} + \text{Ln}(x+1)\,dx = \text{Ln}|x| + (x+1)\cdot\text{Ln}|x+1| - x - 1\Big]_1^2 = F(2) - F(1) = 3\text{Ln}3 - \text{Ln}2 - 1 \approx \boxed{1{,}603\ u^2}$$

Problema 6. El corte vertical de la entrada a la plaza amurallada de cierto pueblo tiene forma de parábola con ecuación $y = -x^2 + 12$, donde x e y se miden en metros e $y = 0$ representa el suelo. Se desea poner una puerta rectangular de modo que las dos esquinas superiores estén en la parábola y las inferiores en el suelo. El resto de la entrada va cerrado con piedra. Calcular:

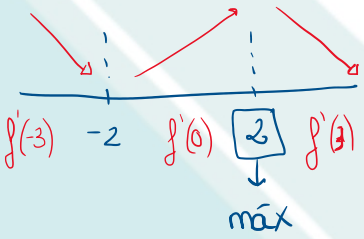
a) Las dimensiones de la puerta para que tenga la mayor superficie posible. (6 puntos)

b) Utilizando la puerta del apartado anterior, obtener el área de la parte frontal de la puerta y el área de la parte frontal de la entrada recubierta por piedra. (4 puntos)



a) $A_R = 2xy \xrightarrow{y = -x^2+12} A = 2x(-x^2+12) \rightarrow A(x) = \boxed{-2x^3 + 24x}$ Función objetivo

$$A'(x) = -6x^2 + 24 = 0 \longrightarrow x^2 = 4 \begin{cases} x = 2 \\ \cancel{x = -2} \end{cases}$$



El área será máx cuando $x = 2$ m

$$y = -2^2 + 12 = 8 \text{ m}$$

Para que tengan la mayor superficie posible, la base debe medir 4m (2x) y la altura de la pared 8m.

b) Área frontal = área rectángulo $\longrightarrow A_R = 2xy = 4\cdot 8 = 32\ m^2$

Área piedra = intersección parábola con el eje x, menos A_R.

$$y = -x^2 + 12 = 0 \begin{cases} x = 2\sqrt{3} \approx 3'64 \\ x = -2\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\int_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} -x^2 + 12\,dx = \frac{-x^3}{3} + 12x\Big]_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} = \left[\frac{-(-3'64)^3}{3} + 12(-3'64)\right] - \left[\frac{-3'64^3}{3} + 12(3'64)\right] = 55'43\ m^2$$

Área piedra $= 55'43 - 32 = \boxed{23'43\ m^2}$

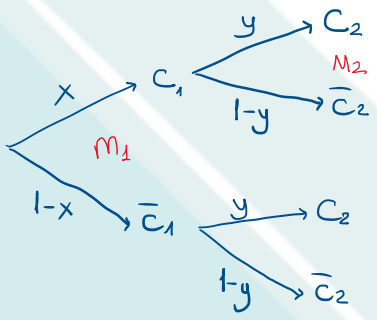
Problema 7. Tenemos dos monedas distintas M_1 y M_2. La probabilidad de obtener cara al lanzar la moneda M_1 es x y la probabilidad de obtener cara al lanzar la moneda M_2 es y.

a) Si lanzamos las dos monedas al mismo tiempo, calcular las probabilidades de no obtener ninguna cara, de obtener solo una cara y de obtener dos caras. (3 puntos)

b) Después de lanzar las dos monedas, volvemos a lanzar solamente las monedas en las que no hemos obtenido cara. Calcular las probabilidades de que el resultado final haya sido obtener ninguna cara, obtener solo una cara y obtener dos caras. (7 puntos)

Moneda 1 $\rightarrow P(C_1) = x$ Moneda 2 $\rightarrow P(C_2) = y$

a)



- $P(\bar{C}_1 \cap \bar{C}_2) = (1-x)\cdot(1-y) = 1-y-x+xy$
- $P(C_1 \cap \bar{C}_2) \cup (\bar{C}_1 \cap C_2) = x\cdot(1-y) + (1-x)\cdot y$
  $= x - xy - y - xy = x + y - 2xy$
- $P(C_1 \cap C_2) = xy$

b)

Después de lanzar las dos monedas, volvemos a lanzar solamente las monedas en las que no hemos obtenido cara. Tomamos como punto de partida la situación anterior y relanzamos aquellas monedas en las que no ha salido cara.

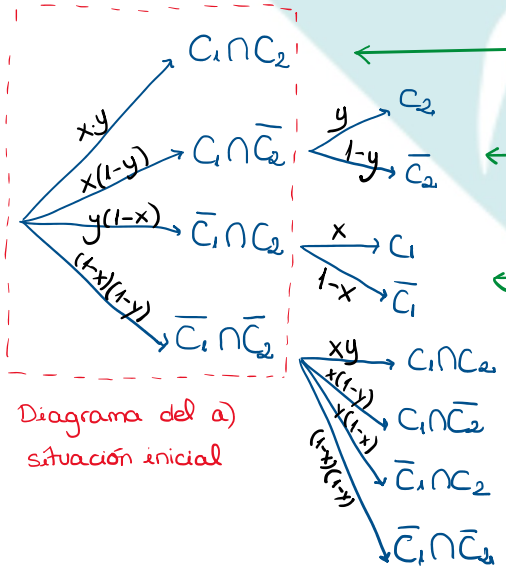


Diagrama del a)
situación inicial

Solo volvemos a lanzar en las que no hemos obtenido cara.

Lanzamos la moneda que no había salido cara: M_2

Lanzamos la moneda que no había salido cara: M_1

lanzamos las dos monedas porque no había salido cara en ninguna. se repite la situación inicial.

- $P(\bar{C}_1 \cap \bar{C}_2) \cap P(\bar{C}_1 \cap \bar{C}_2) = (1-x)(1-y)\cdot(1-x)(1-y) = (1-x)^2(1-y)^2$

- $P((C_1 \cap \bar{C}_2) \cap \bar{C}_2) + P((\bar{C}_1 \cap C_2) \cap \bar{C}_1) + P((\bar{C}_1 \cap \bar{C}_2) \cap (C_1 \cap \bar{C}_2)) + P((\bar{C}_1 \cap \bar{C}_2) \cap (\bar{C}_1 \cap C_2))$

$= x(1-y)^2 + y(1-x)^2 + x(1-x)(1-y)^2 + y(1-y)(1-x)^2$

- $P(C_1 \cap C_2) + P((C_1 \cap \bar{C}_2) \cap C_2) + P((\bar{C}_1 \cap C_2) \cap C_1) + P((\bar{C}_1 \cap \bar{C}_2) \cap (C_1 \cap C_2))$

$= xy + xy(1-y) + xy(1-x) + xy(1-x)(1-y)$

$= xy\,[1 + 1 - y + 1 - x + (1-x)(1-y)]$

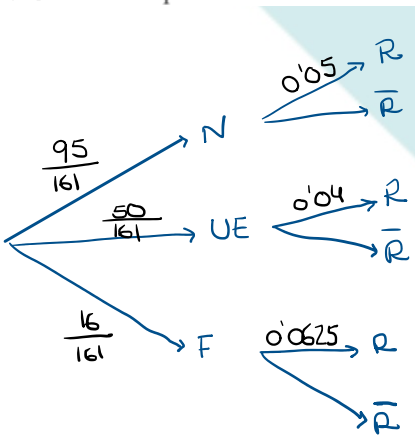
$= xy\,[3 - x - y + 1 - y - x + xy] = xy(4 - 2x - 2y + xy)$

$= 4xy - 2x^2y - 2xy^2 + x^2y^2$

Problema 8. Cada fin de semana llegan al aeropuerto de Alicante 161 vuelos. De estos 161 vuelos, 95 proceden del territorio nacional, 50 proceden de la Unión Europea y 16 proceden de paises de fuera de la Unión Europea. Sabiendo que el 5% de los vuelos con procedencia nacional, el 4% de los vuelos con procedencia de la Unión Europea y el 6.25% del resto de vuelos se retrasan:

N = Nacional UE = Unión Europea F = Fuera
R = Retraso $\bar{R}$ = No retraso

a) Calcular la probabilidad de que durante el fin de semana un vuelo se retrase. (5 puntos)
b) Sabiendo que un vuelo concreto se ha retrasado, calcular la probabilidad de que este vuelo proceda de la Unión Europea. (5 puntos)



a) $P(R)$ = Probabilidad total

$P(R) = P(N \cap R) \cup P(UE \cap R) \cup P(F \cap R)$

$= \left(\frac{95}{161} \cdot 0'05\right) + \left(\frac{50}{161} \cdot 0'04\right) + \left(\frac{16}{161} \cdot 0'0625\right)$

$= 0'029 + 0'012 + 6'2 \cdot 10^{-3} = \boxed{\frac{31}{644} = 0'048}$

b) $P(UE/R)$ = Teorema Bayes

$= \frac{P(UE \cap R)}{P(R)} = \frac{\frac{50}{161} \cdot 0'04}{31/644} = \boxed{\frac{8}{31} = 0'258}$