ACADEMIA La llibreta
www.academialallibreta.es
Gran vía Fernando el Católico 23
46008 Valencia

# EXAMEN 2020 – MATEMÁTICAS PAU+25

## PROBLEMA 1.

Se dan las matrices A = $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ y C = $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Calcular (2A – 3B) x C y 6A – 9B. Justificar por qué los dos resultados son iguales.

b) Obtener los valores x e y tales que $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$

Solución:

$$2A - 3B = 2\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -9 \\ 9 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 15 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}$$

$$(2A - 3B) \times C = \begin{pmatrix} -2 & 15 \\ -5 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6+0 & 0+45 \\ -15+0 & 0-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{-6} & \mathbf{45} \\ \mathbf{-15} & \mathbf{-9} \end{pmatrix}$$

Por otra parte:

$$6A - 9B = 6\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - 9\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 18 \\ 12 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -27 \\ 27 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{-6} & \mathbf{45} \\ \mathbf{-15} & \mathbf{-9} \end{pmatrix}$$

Por tanto se cumple que **(2A – 3B) x C =6A – 9B**

Comprobación:

Como la matriz es 3 veces la matriz identidad C=3I, siendo I = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(2A – 3B) x C = 2AC – 3BC = 2A3I – 3B3I = 6AI – 9BI = 6A – 9B, como queríamos demostrar.

b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$

Transformamos el sistema matricial en un sistema de ecuaciones, haciendo el producto de las matrices:

$$\left.\begin{aligned} 1\cdot x + 0\cdot y &= 5 \\ -2\cdot x + 3\cdot y &= 5 \end{aligned}\right\}$$

Es decir:

$$\left.\begin{aligned} x &= 5 \\ -2x + 3y &= 5 \end{aligned}\right\}$$ Sustituyendo x=5: $-2(5) + 3y = 5 \rightarrow -10 + 3y = 5 \rightarrow 3y=15 \rightarrow y=5$

Por tanto: **x=5 ; y=5**

## PROBLEMA 2.

a) Obtener razonadamente la ecuación de la recta r que pasa por los puntos A=(10,0) y B=(0,10)

b) Obtener razonadamente que la distancia del punto O=(0,0) a la recta r es la mitad de la distancia entre los puntos A y B.

Solución:

a) Hallamos la ecuación general a partir de la ecuación continua de la recta r, que pasa por A(10,0) y tiene como vector director $\overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{AB}$ = B – A = (0,10) – (10,0) = (–10, 10)

r: $\frac{x-10}{-10} = \frac{y-0}{10}$ → r: 10x – 100 = –10y → r: 10x + 10y – 100 = 0 → **r: x + y – 10 = 0**

b) Calculamos la distancia del punto O a la recta r , que será la altura del triángulo:

d(P,r) = $\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$ con P($x_0$, $y_0$) y r: Ax + By + C=0

En nuestro caso: O=(0,0) y r: x + y – 10 = 0

**d(O,r)** = $\frac{|1\cdot 0+1\cdot 0-10|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{|-10|}{\sqrt{2}}$ = $\mathbf{5\sqrt{2}}$ u

La distancia entre los puntos A y B es el módulo del vector $\overrightarrow{AB}$= (–10, 10)

AB = $\sqrt{(-10)^2+(10)^2} = \sqrt{200}$ = $10\sqrt{2}$ u

Como se puede comprobar, **la distancia de O a r ($5\sqrt{2}$) es la mitad de la distancia entre los puntos A y B ($10\sqrt{2}$).**

## PROBLEMA 3.

a) Obtener razonadamente $\lim_{x\to 5} \frac{x^2-25}{x-5}$ y $\lim_{x\to 10} \frac{x^2-25}{x-5}$

b) Calcular la derivada primera de la función f(x) = $(e^{3x}+2)^3$ – ln(cosx)

Solución:

a) $\lim_{x\to 5} \frac{x^2-25}{x-5} = \frac{5^2-25}{5-5} = \frac{0}{0}$ Indeterminación

Aplicando la regla de L'Hopital: $\lim_{x\to 5} \frac{x^2-25}{x-5} = \lim_{x\to 5} \frac{2x}{1} = \frac{2\cdot 5}{1}$ = 10

$\lim_{x\to 10} \frac{x^2-25}{x-5} = \frac{10^2-25}{10-5}$ = 15

b) Calcular la derivada primera de la función f (x) = $(e^{3x}+2)^3$ – ln(cosx)

La derivada de la resta es la resta de las derivadas

f ' (x) = $((e^{3x}+2)^3)' - (\ln(\cos x))'$

f ' (x) = $3\cdot(e^{3x}+2)^2\cdot(e^{3x}+2)' - \frac{1}{\cos x}\cdot(\cos x)'$

f ' (x) = $3\cdot(e^{3x}+2)^2\cdot e^{3x}\cdot 3 - \frac{1}{\cos x}\cdot(-\operatorname{sen} x)$

f ' (x) = $9\,e^{3x}(e^{3x}+2)^2 + \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$

**f ' (x) = $9\,e^{3x}(e^{3x}+2)^2$ + tgx**

## PROBLEMA 4.

Dada la función $(x)$=$(x-1)(3-x)$, obtener el área de la región acotada del plano comprendida entre su gráfica y el segmento que une los puntos (1, 0) y (3, 0).

Solución:

El segmento que une los puntos (1, 0) y (3, 0) es el eje x (y=0) y los límites de integración x=1 y x=3.

Multiplicamos para obtener la función más sencilla de integrar: $(x)$=$(x-1)(3-x)$ = $-x^2+4x-3$

<u>Cálculo de la primitiva</u>: (recuerda que $\int x^n = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ )

I = $\int(-x^2+4x-3)dx = -\frac{x^3}{3}+\frac{4x^2}{2}-3x+C$ = $\mathbf{-\frac{x^3}{3}+2x^2-3x+C}$

Comprobamos que la función f(x)= $-x^2+4x-3$ no se anula en el intervalo (1,3):

$-x^2+4x-3=0$ → Las ecuaciones de segundo grado $ax^2+bx+c=0$ se resuelven $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

a = −1
b = 4
c = −3

$x=\frac{-4\pm\sqrt{(4)^2-4(-1)(-3)}}{2\cdot 3}=\frac{-4\pm\sqrt{4}}{6}=\frac{-4\pm 2}{6}$ → $x=\frac{-4+2}{6}=\frac{-1}{3}$ ; → $x=\frac{-4-2}{6}=-1$

Se anula en x=−1/3 y en x=−1, pero ninguno de estos valores pertenece al intervalo (1,3).

<u>Cálculo del área</u>: (no te olvides del valor absoluto):

A = $\left|\int_1^3(-x^2+4x-3)dx\right| = \left|-\frac{x^3}{3}+2x^2-3x\,\right|_1^3\right|$ Aplicando la regla de Barrow

A = $\left|\left(-\frac{3^3}{3}+2\cdot 3^2-3\cdot 3\right)-\left(-\frac{1^3}{3}+2\cdot 1^2-3\cdot 1\right)\right| = \left|0-\left(-\frac{4}{3}\right)\right| = \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}\ u^2$

## PROBLEMA 5.

Las edades de 50 clientes habituales de un pequeño comercio son las siguientes:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Edades | 18 | 23 | 24 | 28 | 32 | 33 | 43 | 44 | 56 |
| N° de clientes | 2 | 5 | 4 | 12 | 5 | 8 | 7 | 3 | 4 |

Obtener, razonadamente, la edad media y la desviación típica de las edades de los clientes.

Solución:

Construimos la tabla que necesitamos para calcular las sumas:

| (Edades) $x_i$ | (N° de clientes) $F_i$ | $F_i \cdot x_i$ | $F_i \cdot x_i^2$ |
|---|---|---|---|
| 18 | 2 | 2·18=36 | $2 \cdot 18^2 = 648$ |
| 23 | 5 | 5·23=115 | $5 \cdot 23^2 = 2645$ |
| 24 | 4 | 4·24=96 | $4 \cdot 24^2 = 2304$ |
| 28 | 12 | 336 | 9408 |
| 32 | 5 | 160 | 5120 |
| 33 | 8 | 264 | 8712 |
| 43 | 7 | 301 | 12943 |
| 44 | 3 | 132 | 5808 |
| 56 | 4 | 224 | 12544 |
| | N=50 | $\sum F_i \cdot x_i = 1664$ | $\sum F_i \cdot x_i^2 = 60132$ |

**Media:** $\bar{x} = \frac{\sum F_i \cdot x_i}{N}$ ; $\bar{x} = \frac{1664}{50} = $ **33,28 años**

La desviación típica es la raíz cuadrada de la varianza, por tanto hay que calcular la varianza:

$V = \frac{\sum F_i \cdot x_i^2}{N} - \bar{x}^2$ ; $V = \frac{60132}{50} - 33{,}28^2 = 95{,}08$

Y la **desviación típica** será: $s = \sqrt{V} = \sqrt{95{,}08}$ ; **s = 9,75**