EXAMEN 2021 – MATEMÁTICAS PAU +25

PROBLEMA 1.

Hasta el pasado mes enero de este año, las tres comunidades autónomas que más vacunas recibieron para la COVID-19 suman un total de 850.000 vacunas. La diferencia entre el número de vacunas de la comunidad que más recibió y la que ocupa el tercer lugar es de 98.000 vacunas. Por último, sabemos que el número total de vacunas de las comunidades que ocupan la segunda y la tercera posición ascienden a 519.000. ¿Cuántas vacunas recibieron hasta el mes de enero cada una de estas tres comunidades?

Solución:

Definimos las incógnitas:

x= vacunas recibidas por la comunidad que más recibió

y= vacunas recibidas por la segunda comunidad que recibió más

z= vacunas recibidas por la tercera comunidad que recibió más

Planteamos las ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 850.000 \\ x - y = 98.000 \\ y + z = 519.000 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \\ \text{Despejamos } x = 98.000 + y \\ \text{Despejamos } z = 519.000 - y \end{array}$$

Sustituyendo x y z en la primera ecuación:

$x + y + z = 850.000$

$98.000 + y + y + 519.000 - y = 850.000$

$617.000 + y = 850.000$

y = 233.000 vacunas

Sustituyendo: $x = 98.000 + y = 98.000 + 233.000$; **x = 331.000 vacunas**

Sustituyendo: $z = 519.000 - y = 519.000 - 233.000$; **z = 296.000 vacunas**

331.000 vacunas la comunidad que más recibió, 233.000 vacunas la segunda comunidad que más recibió y 296.000 vacunas la tercera que más recibió.

PROBLEMA 2.

Calcula el perímetro y el área del triángulo de vértices A(1,1), B(4,2) y C(3,3)

Solución:

El perímetro es la suma de los lados: P= AB + AC + BC

$\overrightarrow{AB}$ = B – A = (4,2) – (1,1) = (3,1)

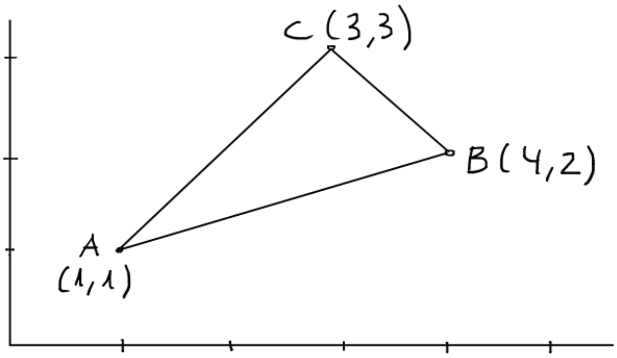
Su módulo AB = $\sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$ u

$\overrightarrow{AC}$ = C – A = (3,3) – (1,1) = (2,2)

Su módulo AB = $\sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ u

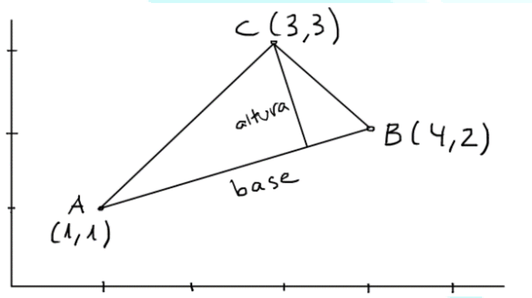
$\overrightarrow{BC}$ = B – C = (4,2) – (3,3) = (1,–1)

Su módulo AB = $\sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$ u



Por tanto **P =** $\mathbf{\sqrt{10} + 2\sqrt{2} + \sqrt{2} = \sqrt{10} + 3\sqrt{2}}$ **= 7,40** u

El área de un triángulo es A = $\frac{base \cdot altura}{2}$, en este caso: A = $\frac{\mathrm{AB \cdot d(C,r)}}{2}$



Hallamos la ecuación continua de la recta r que pasa por A(1,1) y tiene como vector director $\overrightarrow{AB}$ =(3,1), y la pasamos a general:

r: $\frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{1}$ → r: x – 1 = 3y – 3 → r: x – 3y + 2 = 0

Calculamos la distancia del punto C a la recta r , que será la altura del triángulo:

d(P,r) = $\frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ con P(x_0, y_0) y r: Ax + By + C=0

En nuestro caso: C(3,3) y r: x – 3y + 2 = 0

d(C,r) = $\frac{|1 \cdot 3 - 3 \cdot 3 + 2|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2}} = \frac{|3 - 9 + 2|}{\sqrt{10}} = \frac{4}{\sqrt{10}}$ u

El área del triángulo es $A = \frac{AB\cdot d(C,r)}{2} = \frac{\sqrt{10}\cdot\frac{4}{\sqrt{10}}}{2} = 2\ u^2$

PROBLEMA 3.

a) Obtener razonadamente $\lim_{x\to 2}\frac{x^3-5x^2+6x}{x^2-x-2}$

b) Calcular razonadamente la derivada primera de la función $f(x) = \frac{1+sen(x)}{1+e^x}$

Solución:

a) $\lim_{x\to 2}\frac{x^3-5x^2+6x}{x^2-x-2} = \frac{2^3-5\cdot 2^2+6\cdot 2}{2^2-2-2} = \frac{0}{0}$ Indeterminación

Aplicando la regla de L'Hopital: $\lim_{x\to 2}\frac{x^3-5x^2+6x}{x^2-x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{3x^2-10x+6}{2x-1} = \frac{3\cdot 2^2-10\cdot 2+6}{2\cdot 2-1} = \frac{-2}{3}$

b) $f(x) = \frac{1+sen(x)}{1+e^x}$ → Aplicamos la regla de la división: $y = \frac{u}{v}$ → $y = \frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}$

$f'(x) = \frac{(1+sen(x))'\cdot(1+e^x)-(1+sen(x))\cdot(1+e^x)'}{(1+e^x)^2} = \frac{\cos(x)\cdot(1+e^x)-(1+sen(x))\cdot e^x}{(1+e^x)^2}$

PROBLEMA 4.

Dada la función $f(x) = x^3+2x^2+x$.

a) Obtener razonadamente sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

b) Calcular razonadamente sus máximos y mínimos.

Solución:

a) Para calcular los intervalos de crecimiento y decrecimiento se deriva la función y se iguala a 0:

$f'(x) = 0$ → x posibles máximos y mínimos

El signo de $f'(x)$ nos da los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función:

Si $f'(x) > 0$ Crece

Si $f'(x) < 0$ Decrece

Así:

Dom(f) = R

$f'(x) = 3x^2+4x+1$ → $f'(x) = 0$

$3x^2+4x+1 = 0$ Las ecuaciones de segundo grado $ax^2+bx+c = 0$ se resuelven $x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$$\left.\begin{array}{l} a = 3 \\ b = 4 \\ c = 1 \end{array}\right] \quad x = \frac{-4 \pm \sqrt{(4)^2 - 4\cdot 3\cdot 1}}{2\cdot 3} = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{6} = \frac{-4 \pm 2}{6} \qquad x = \frac{-4+2}{6} = \frac{-1}{3} \quad x = \frac{-4-2}{6} = -1$$

Posibles máx / mín

Estudiamos el signo de $f'(x) = 3x^2 + 2x + 1$ en los diferentes intervalos:

$-\infty$ $\qquad$ -1 $\qquad$ $-1/3$ $\qquad$ $+\infty$

$f'(-4) > 0$	$f'(-0,5) < 0$	$f'(0) = 1 > 0$
↗	↘	↗

f (x) es creciente en $(-\infty,-1) \cup (-1/3, +\infty)$ y decreciente en $(-1,-1/3)$

b) La función presenta un máximo en $x=-1$ y un mínimo en $x=-1/3$.

Para calcular los puntos, se sustituyen los valores de x en la función original $f(x) = x^3 + 2x^2 + x$.

Para $x=-1$: $f(-1)=(-1)^3+ 2(-1)^2+ (-1) = 0$ → **Máximo (−1, 0)**

Para $x=-1/3$: $f(-1/3)=(-1/3)^3+ 2(-1/3)^2+ (-1/3) = -4/27$ → **mínimo (−1/3, −4/27)**

PROBLEMA 5.

Las temperaturas, en grados centígrados, registradas en una ciudad a las 11:00 durante el mes de mayo son las siguientes:

Temperatura	12	13	14	15	16	17	18	19	20
N° de días	2	1	3	4	6	5	4	3	3

Obtener razonadamente la temperatura media y la desviación típica.

Solución:

Construimos la tabla que necesitamos para calcular las sumas:

(Temperatura) x_i	(N° de días) F_i	$F_i \cdot x_i$	$F_i \cdot x_i^2$
12	2	$2\cdot 12=24$	$2\cdot 12^2= 288$
13	1	$1\cdot 13=13$	$1\cdot 13^2=169$
14	3	$3\cdot 14=42$	$3\cdot 14^2=588$
15	4	60	900
16	6	96	1536
17	5	85	1445
18	4	72	1296
19	3	57	1083
20	3	60	1200
	N=31	$\sum F_i \cdot x_i = 509$	$\sum F_i \cdot x_i^2 = 8505$

Media: $\bar{x} = \frac{\sum F_i \cdot x_i}{N}$; $\bar{x} = \frac{509}{31}$ = **16,42 días**

La desviación típica es la raíz cuadrada de la varianza, por tanto hay que calcular la varianza:

$V = \frac{\sum F_i \cdot {x_i}^2}{N} - \bar{x}^2$; $V = \frac{8505}{31} - 16{,}42^2 = 4{,}74$

Y la **desviación típica** será: $s = \sqrt{V} = \sqrt{4{,}74}$; **s = 2,18**