TEMA 1: MATRICES Y DETERMINANTES

1) Concepto de matriz

Una matriz es un conjunto de números ordenados en filas y columnas, y por tanto una manera sencilla de clasificar información. Las matrices se escriben entre paréntesis o corchetes y se denotan por letras mayúsculas: A, B, C...

- Por ejemplo, podemos clasificar mediante una tabla las horas de trabajo de 2 profesores según la materia impartida:

	Profesor A	Profesor B
Matemáticas	15	4
Inglés	12	5
Geografía	14	6

Pero también podría utilizarse una matriz: $A = \begin{pmatrix} 15 & 4 \\ 12 & 5 \\ 14 & 6 \end{pmatrix}$

- **Ejemplo 1**: En un edificio hay tres tipos de viviendas: L3, L4 y L5. Las viviendas L3 tienen 4 ventanas pequeñas y 3 grandes; las L4 tienen 5 ventanas pequeñas y 4 grandes, y las L5, 6 pequeñas y 5 grandes.
  Cada ventana pequeña tiene 2 cristales y 4 bisagras, y las grandes, 4 cristales y 6 bisagras.

  Escribe una matriz que describa:
  a) El número y el tamaño de las ventanas de cada vivienda.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \text{Peq} & \text{Gr} \end{array} \\ \begin{array}{c} L3 \\ L4 \\ L5 \end{array} & \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} \end{array}$$

  b) El número de cristales y bisagras de cada tipo de ventana.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \text{Crist.} & \text{Bisagras} \end{array} \\ \begin{array}{c} Peq \\ Gr \end{array} & \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \end{array}$$

- Las matrices sirven también para representar los coeficientes de los sistemas de ecuaciones lineales, como veremos en el siguiente tema. Sea el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 2x + y + z = 1 \\ x + 2y + z = 1 \\ x + y + 2z = 1 \end{array}\right\}$$

La matriz de coeficientes será $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y la ampliada $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$

- **Definiciones: Orden y elementos de una matriz**

Se llama **orden o dimensión de una matriz** al número de filas por el número de columnas y se representa por ***m x n:***

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 7 \end{bmatrix}$: matriz de orden 2 x 3, porque tiene 2 filas y 3 columnas, y se denota $M_{2 \times 3}$

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$: matriz de orden 2 x 2, porque tiene 2 filas y 2 columnas (también se denomina matriz cuadrada de orden 2), y se denota $M_{2 \times 2}$

El **número de elementos de una matriz** es mxn (efectuando la operación). Así la primera tiene 2·3 = 6 elementos y la segunda 2·2 = 4.

En general, llamaremos **matriz de m filas y n columnas** o **matriz $M_{m \times n}$**, al conjunto de ***m x n*** números reales ordenados en filas y columnas del modo siguiente:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

donde:

a_{ij} son números reales, y se llaman **elementos de la matriz.**
Cada elemento tiene dos subíndices: el primero i indica la fila (entre 1 y ***m***) y el segundo j, la columna (entre **1** y ***n).***

- **Ejemplo 2:** $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}$ Es una matriz de orden o dimensión 2 x 3 (tiene 2 filas y 3 columnas)
Consta de 2·3= 6 elementos, que son: $a_{11}=3$ (fila 1, columna 1)
$a_{12}=2$ (fila 1, columna 2)
$a_{13}=1$ (fila 1, columna 3)
$a_{21}=0$ (fila 2, columna 1)
$a_{22}=-1$ (fila 2, columna 2)
$a_{23}=5$ (fila 2, columna 3)

2) Tipos de matrices

Matriz fila es la que consta de una sola fila y es de orden 1 x n.
Ej: La matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ es de orden 1 x 3

Matriz columna es la que consta de una única columna y es de orden m x 1.

Ej. $\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$ es de orden 3 x 1

Matriz rectangular es la que tiene distinto número de filas que de columnas ($m \neq n$)

$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & 4 & 7 \end{bmatrix}$ es de orden 2 x 3

Matriz cuadrada es la que tiene el mismo número de filas que de columnas ($m = n$)

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ en este caso se dice de orden 2 (en vez de 2 x 2).

En las <u>matrices cuadradas</u> podemos distinguir dos diagonales:

- **Diagonal principal** (formada por los elementos que se encuentran en la diagonal que va del vértice superior izquierdo al vértice inferior derecho):

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 7 \\ -3 & 5 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & -3 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Son los elementos a_{ij}, donde i=j

- **Diagonal secundaria** (la diagonal opuesta):

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 7 \\ -3 & 5 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & -3 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

- **Tipos de matrices cuadradas:**

Triangular Superior $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Triangular Inferior $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \end{bmatrix}$

Matriz diagonal: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ Matriz en la que son nulos todos los elementos que no son de la diagonal principal.

Matriz escalar: Matriz diagonal en la que los elementos de la diagonal principal son iguales.

Matriz unidad o identidad: $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $a_{ij} = 1$, con $i = j$
$a_{ij} = 0$ $i \neq j$ $\forall i$ $\forall j$ (para todo i y para todo j)
(1 en la diagonal principal y 0 el resto)

Se representa por I_n , en nuestro ejemplo I_3. Veremos que es el elemento unidad de la multiplicación de matrices, que definiremos posteriormente.

Matriz nula: Matriz cuyos elementos son todos nulos y se representa por **0**.

$$0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz opuesta: Es una matriz cuyos elementos son los opuestos de la matriz dada. La opuesta de A se representa por **– A**.

- **Ejemplo 3**: La opuesta de la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ es $-A = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

Matriz traspuesta: Es la que resulta al cambiar las filas por las columnas. Se representa por A^t.

- **Ejemplo 4**: Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \end{bmatrix}$ su traspuesta es $A^t = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$

Simétrica: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ al doblarla por la diagonal principal los elementos coinciden ($a_{ij} = a_{ji}$), es decir, $A = A^t$

Antisimétrica cuando coincide con la opuesta de su traspuesta, es decir: **A = –At**

La matriz $\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 6 \\ 0 & -6 & 0 \end{bmatrix}$ es antisimétrica, pues su traspuesta es $\begin{bmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & -6 \\ 0 & 6 & 0 \end{bmatrix}$, opuesta a la dada.

Matriz idempotente: $A = A^2$ **Matriz involutiva**: $A^2 = I$

Dos matrices son **iguales** cuando tienen el mismo número de filas y de columnas (misma dimensión) y los elementos que están en la misma posición son idénticos.

$$[a_{ij}]_{m \times n} = [b_{ij}]_{m \times n} \Longrightarrow a_{ij} = b_{ij} \quad \forall i \ \forall j$$

3) Operaciones con matrices

a) Suma y diferencia de matrices

Dadas dos matrices A y B del **mismo orden *m x n***, es decir $A = (a_{ij})_{m \times n}$ y $B = (b_{ij})_{m \times n}$, se pueden sumar (o restar), resultando otra **matriz C del mismo orden**. Los elementos de esta matriz se obtienen sumando (o restando) los elementos de A y B que se encuentran en la misma posición:

$$[a_{ij}]_{m \times n} \pm [b_{ij}]_{m \times n} = [c_{ij}]_{m \times n}$$ donde c_{ij} se obtiene sumando $a_{ij} \pm b_{ij}$

- **Ejemplo 5:**

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

- **Ejemplo 6:**

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 0 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 2 & -8 \end{bmatrix}$$

- **Ejemplo 7:**

Las matrices $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} -5 \\ 0 \end{bmatrix}$ no se pueden sumar, pues no tienen la mima dimensión.

- **Propiedades de la suma:** Sean A, B y C matrices del mismo orden:
  - ✓ Conmutativa: $A + (B + C) = (A + B) + C$
  - ✓ Asociativa: $A + B = B + A$
  - ✓ El elemento neutro es la matriz nula (se representa por **O**), porque $A + O = O + A = A$
  - ✓ Existe el elemento opuesto, porque $A + (-A) = O$

b) Producto de un escalar λ por una matriz

Si $A = (a_{ij})$ se define $\lambda \cdot A = (\lambda \cdot a_{ij})$ $\lambda \in R$, es decir, al multiplicar una matriz por un número, cada elemento de la matriz queda multiplicado por ese número.

- **Ejemplo 8:**

$$5 \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -5 \\ -5 & 25 \end{bmatrix}$$

- **Propiedades:** Sean A y B dos matrices del mismo orden y sean k y h dos números reales:
  - ✓ Distributiva: $k \cdot (A + B) = k \cdot A + k \cdot B$; $(k + h) \cdot A = k \cdot A + h \cdot A$;
  - ✓ Asociativa mixta: $k \cdot (h \cdot A) = (k \cdot h) \cdot A$
  - ✓ Elemento neutro: $1 \cdot A = A$

c) Producto de matrices

Para poder multiplicar dos matrices **A (mxn)** y **B(nxp)** el número de columnas de A debe coincidir con el número de filas B, y dará una **matriz C de orden mxp.**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \dots & b_{np} \end{pmatrix}$$

Cada elemento c_{ik} de la **matriz producto** es la suma de los productos de los elementos de la fila i-ésima de la primera matriz por los elementos de la columna k-ésima de la segunda matriz

$$C = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \dots a_{1n}b_{n1} & \dots & a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \dots a_{1n}b_{n1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}b_{11} + a_{m2}b_{21} + \dots a_{mn}b_{n1} & \dots & a_{m1}b_{1p} + a_{m2}b_{2p} + \dots a_{mn}b_{np} \end{pmatrix}$$

Esto se ve mejor con un ejemplo:

- **Ejemplo 9:** Si multiplicamos una matriz de orden 2x3 por otra 3x2, el resultado será una matriz de orden 2x2. Así:

$$\boxed{\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.1 + 3.0 + 5.2 & 2.(-1) + 3.1 + 5.5 \\ -1.1 + (-1).0 + 0.2 & -1.(-1) + (-1).1 + 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 26 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}}$$

2 x 3   3 x 2   2 x 2

- **Propiedades del producto de matrices:**

  ✓ El producto de matrices **no cumple** la propiedad **conmutativa:** $A \cdot B \neq B \cdot A$

  Si multiplicamos la matriz A (2x3) por la B (3x2), el resultado es una matriz C (2x2).
  Si multiplicamos la matriz B (3x2) por la A (2x3), el resultado es una matriz C (3x3).

  ➢ **Ejemplo 10**: Si calculamos B · A en el ejemplo anterior, obtenemos una matriz 3x3 en vez de 2x2:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+1 & 3+1 & 5+0 \\ 0-1 & 0-1 & 0+0 \\ 4-5 & 6-5 & 10+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 10 \end{bmatrix}$$

  ✓ Asociativa: Sean $A_{mxn}\, B_{nxp}\, C_{pxr} \rightarrow$ $A \cdot B \cdot C = (A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
  ✓ Distributiva por la izquierda: : Sean $A_{mxn}\, B_{nxp}\, C_{pxr} \rightarrow$ $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
  ✓ Distributiva por la derecha: Sean $A_{mxn}\, B_{mxn}\, C_{pxr} \rightarrow$ $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$
  ✓ Distributiva respecto a la multiplicación por un número real: $k \cdot (A + B) = k \cdot A + k \cdot B$
  ✓ **Solo se cumplen las identidades notables si A y B conmutan.** Para evitar errores, efectuamos las potencias <u>multiplicando la matriz por sí misma</u> tantas veces como indique el exponente.
  $A^2 = A \cdot A$
  $A^3 = A \cdot A \cdot A = A \cdot A^2 = A^2 \cdot A$
  $A^4 = A \cdot A \cdot A \cdot A = A^2 \cdot A^2 = A \cdot A^3 = A^3 \cdot A \ldots$

  Muy importante: $(A+B)^2 = (A+B) \cdot (A+B)$ pero no $\cancel{A^2 + 2AB + B^2}$
  $(A \cdot B)^2 = (A \cdot B) \cdot (A \cdot B)$ pero no $\cancel{A^2 \cdot B^2}$
  ...
  No aplicar las identidades notables

  ➢ **Ejemplo 11**: Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

  $\rightarrow A^3 = A \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

  ✓ Si A·B=0 no siempre A=0 o B=0. Ejemplo: $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
  ✓ Propiedad del **elemento neutro** (unidad): Si A es cuadrada y de orden n:
  $A \cdot I = I \cdot A = A$

Para la **traspuesta de una matriz A,** que recordemos que es la matriz que resulta al cambiar las filas por columnas y se representa por A^t, se cumplen las **propiedades** siguientes:

✓ $(A^t)^t = A$
✓ $(\lambda \cdot A)^t = \lambda \cdot A^t$ para todo número real λ
✓ $(A + B)^t = A^t + B^t$
✓ $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$

➢ **Ejemplo 12**: Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

determinar las siguientes matrices: a) $2A + 3D$, b) $A \cdot B$, c) $A^2 - 2D^2$

a)

$$2A = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$3D = 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 15 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$$

$$2A + 3D = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 15 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 19 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$$

b)

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot1+2\cdot1 & 2\cdot0+2\cdot2 & 2\cdot3+2\cdot5 \\ 1\cdot1+3\cdot1 & 1\cdot0+3\cdot2 & 1\cdot3+3\cdot5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 16 \\ 4 & 6 & 18 \end{pmatrix}$$

c)

$$A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+2 & 4+6 \\ 2+3 & 2+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 5 & 11 \end{pmatrix}$$

$$D^2 = D \times D = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+10 & 10-5 \\ 4-2 & 10+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 5 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}$$

$$2 \cdot D^2 = 2 \cdot \begin{pmatrix} 14 & 5 \\ 2 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 & 10 \\ 4 & 22 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - 2 \cdot D^2 = \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 5 & 11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 28 & 10 \\ 4 & 22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-28 & 10-10 \\ 5-4 & 11-22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -22 & 0 \\ 1 & -11 \end{pmatrix}$$

- **Ejemplo 13**: Dada la matriz A=$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$determina el conjunto de matrices B que conmutan con A.

B será una matriz 2x2 de la forma B=$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$y si conmuta con A se ha de cumplir: A·B=B·A

$$A\cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot a+2\cdot c & 1\cdot b+2\cdot d \\ 0\cdot a+1\cdot c & 0\cdot b+1\cdot d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$B\cdot A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cdot 1+b\cdot 0 & a\cdot 2+b\cdot 1 \\ c\cdot 1+d\cdot 0 & c\cdot 2+d\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2a+b \\ c & 2c+d \end{pmatrix}$$

Por tanto: $\begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2a+b \\ c & 2c+d \end{pmatrix}$ y equiparando términos:

$$\left.\begin{array}{l} a+2c=a \rightarrow c=0 \\ b+2d=2a+b \rightarrow 2d=2a \rightarrow a=d \\ c=c \rightarrow \text{No nos aporta información} \\ d=2c+d \rightarrow d=d \rightarrow \text{No nos aporta información} \end{array}\right\} \text{ y entonces } B = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

- **Ejemplo 14**: Sea A = $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ justifica que $A^4=I$ y calcula A^7, A^{30} y A^{100}.

Sabemos que por las propiedades anteriores: $A^4 = A\cdot A\cdot A\cdot A = A^2\cdot A^2$

Calculemos $A^2 = A\cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Y calculemos $A^4 = A^2\cdot A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

Así, $A^7=A^4\cdot A^3 = I\cdot A^3 = A^3 = A\cdot A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$A^{30} = (A^4)^7\cdot A^2 = I^7\cdot A^2 = A^2$ y $A^{100} = (A^4)^{25} = I^{25} = I$

d) Matriz inversa

Si el producto de dos matrices da como resultado la matriz identidad I es que hemos multiplicado una matriz por su inversa.

Dada una matriz cuadrada de orden **n**, con $|A| \neq 0$, se llama **matriz inversa de** A y se representa por A^{-1} a la matriz que cumple la siguiente propiedad:

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I_n$$ donde I_n es la matriz unidad o identidad.

No todas las matrices cuadradas tienen inversa, solo las que cumplen que su determinante es ≠ 0

Las matrices que tienen inversa se llaman **invertibles** o **regulares**. Si una matriz no tiene inversa, es una matriz **no invertible** o **singular**.

Como no se puede efectuar la división de matrices, en su lugar se efectuará esta multiplicación, ya que el resultado es la matriz identidad I. Para calcular una matriz inversa se requiere el concepto de **determinante** de una matriz cuadrada.

4) Determinantes

Sea A una matriz cuadrada, el **determinante** de la matriz se representa por $|A|$ o bien por **det (A).**

El determinante de una matriz es el <u>número real que se asocia a la matriz</u> y que se calcula en función del orden de la misma:

a) Cálculo directo del valor del determinante (matrices de orden 1 a 3)

- El **determinante** de una matriz de primer orden se halla con su valor absoluto: $|a_{11}| = a_{11}$
  - **Ejemplo 15**: $|12| = 12$; $|-7| = -7$

- El **determinante** de una matriz de segundo orden se halla mediante la regla siguiente:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

  - **Ejemplo 16**: El determinante de: $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1) - 3 \cdot 1 = -2 - 3 = -5$

- **Determinante** de una matriz de tercer orden: La **regla de Sarrus** nos permite calcular este determinante, y consiste en conseguir 6 términos, tres positivos y tres negativos, que se calculan y se operan siguiendo el esquema siguiente:

Términos positivos:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13}$$

Términos negativos:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{11} - a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33}$$

El resultado final del determinante es la suma de los seis términos:

$$|A| = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{11} - a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33}$$

- **Ejemplo 17:**

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 5 \end{vmatrix} = (-1).1.5 + 2.4.0 + 1.(-3).1 - 1.1.0 - 1.2.5 - (-3).4.(-1) = -5 + 0 - 3 - 0 - 10 - 12 = -30$$

Propiedades de los determinantes:

1ª) El determinante del producto de dos matrices cuadradas del mismo orden coincide con el producto del determinante de cada una de ellas:

$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$, pero ojo: $|A + B| \neq |A| + |B|$

2ª) Al trasponer una matriz, su determinante no varía: $|A| = |A|^t$

3ª) Si todos los elementos de una fila (o columna) se multiplican por un número, el determinante queda multiplicado o dividido por ese número.

- **Ejemplo 18:** $\begin{vmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{3} \end{vmatrix} = \mathbf{6 + 1 = 7}$

Si multiplicamos la 1ª fila por 3: $\begin{vmatrix} \mathbf{6} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{3} \end{vmatrix} = \mathbf{18 + 3 = 21}$, que es el triple del resultado anterior.

Es decir, podemos escribir:

$$3\cdot\begin{vmatrix}2 & -1\\1 & 3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}6 & -3\\1 & 3\end{vmatrix}$$

Por tanto, si en una fila o columna todos los elementos son múltiplos de un número, se puede dividir dicha fila o columna por ese número y sacarlo fuera multiplicando al determinante, es decir:

- **Ejemplo 19**:

$$\begin{vmatrix}3 & -2 & 5 & 0\\2 & 1 & -3 & 0\\0 & -2 & 1 & -2\\5 & 1 & 0 & 2\end{vmatrix}\xrightarrow{4^a \text{ columna por } 1/2} 2\cdot\begin{vmatrix}3 & -2 & 5 & 0\\2 & 1 & -3 & 0\\0 & -2 & 1 & -1\\5 & 1 & 0 & 1\end{vmatrix}$$

$|\alpha\cdot A_n| = \alpha^n\cdot|A_n|$
el número queda
elevado al orden
del determinante

- **Ejemplo 20:**

$$\begin{vmatrix}6 & -2 & 8 & 0\\2 & 6 & -8 & 0\\0 & -4 & -2 & -2\\10 & 2 & 0 & 2\end{vmatrix}\xrightarrow{\text{las 4 columnas por } ½} 2\cdot2\cdot2\cdot2\begin{vmatrix}3 & -1 & 4 & 0\\1 & 3 & -4 & 0\\0 & -2 & -1 & -1\\5 & 1 & 0 & 1\end{vmatrix} = 2^4\cdot\begin{vmatrix}3 & -1 & 4 & 0\\1 & 3 & -4 & 0\\0 & -2 & -1 & -1\\5 & 1 & 0 & 1\end{vmatrix}$$

Importante: Recordemos que en el caso de **matrices**, el producto de un número real por una matriz no se opera así, sino multiplicando **todos los términos** por ese número:

$$3\cdot\begin{bmatrix}2 & -1\\1 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & -3\\3 & 9\end{bmatrix} \text{ o a la inversa } \begin{bmatrix}6 & -3\\3 & 9\end{bmatrix}=3\cdot\begin{bmatrix}2 & -1\\1 & 3\end{bmatrix}$$

4ª) Por tanto, al multiplicar una matriz cuadrada de orden n por un número, el determinante es el mismo multiplicado por el número elevado al orden **n** de la matriz: $|\alpha\cdot A_n| = \alpha^n\cdot|A_n|$

- **Ejemplo 21**:

$$\left|2\cdot\begin{pmatrix}-2 & 0 & 2\\1 & 1 & 0\\0 & 3 & -1\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}-4 & 0 & 4\\2 & 2 & 0\\0 & 6 & -2\end{pmatrix}\right| = 2^3\cdot\left|\begin{pmatrix}-2 & 0 & 2\\1 & 1 & 0\\0 & 3 & -1\end{pmatrix}\right|$$ → 2^3 porque es una matriz de orden 3

5ª) Al cambiar dos filas (o dos columnas) entre sí, el determinante únicamente cambia de signo.

- **Ejemplo 22**: $\begin{vmatrix}2 & 1\\-5 & -1\end{vmatrix} = -\begin{vmatrix}-5 & -1\\2 & 1\end{vmatrix}$

6ª) Un determinante con una fila o columna de ceros es nulo → **|A|=0**

7º) Un determinante con **dos filas o columnas iguales** (o proporcionales) es nulo → |A|=0

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2.1.0+3.1.5+2.1.3-3.1.5-3.1.2-2.1.0 = 0+15+6-15-6-0 = 0$$ (vemos que las filas 1 y 2 son Iguales)

8º) El determinante de una matriz en que **una fila o columna es combinación lineal** de otras filas o columnas es cero → |A|=0

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 30+0-12-0+2-20=32-32=0$$ (vemos que C3=2·C1−C2)

9º) Si a los elementos de una fila (o columna) de un determinante **se le suman o restan** los de cualquier otra multiplicada por un número (es decir, se le suma una combinación lineal de las otras filas o columnas), el valor del determinante no varía.

- **Ejemplo 23**: $\begin{vmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0-3+0-0-0+4=1$

Si sustituimos la fila 3 por la suma de ella más la primera por −1 y la segunda por 2, es decir,

F3:	0	1	4
− F1:	0	1	3
2·F2:	2	4	6
F3=F3−F1+F2 →	2	6	13

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \\ \boxed{2 \quad 6 \quad 13} \end{vmatrix} = 0-6-18+12-0+13=1$$ → Vemos que el determinante sigue valiendo 1.

10º) Si una fila o columna es la suma de varios sumandos, se descompone en tantos determinantes como sumandos:

$$\begin{vmatrix} a & b+c & d \\ e & f+g & h \\ i & j+k & l \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & d \\ e & f & h \\ i & j & l \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & c & d \\ e & g & h \\ i & k & l \end{vmatrix}$$

- **Ejemplo 24**: $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 4 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3+1 & 5 \\ 4 & 2+3 & 4 \\ 0 & 1+2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}$

11º) El determinante de una matriz triangular o de una matriz diagonal es el producto de los elementos de su diagonal principal.

b) Cálculo de un determinante por sus adjuntos (cualquier matriz cuadrada)

Para calcular el determinante de una matriz de orden superior a 3 no existe una forma directa, y se ha de calcular desarrollando por los elementos de una fila o columna.

El **determinante de la matriz A** es igual a la **suma de los elementos de una fila (o columna) multiplicados por sus adjuntos.**

Veamos los conceptos que necesitamos para el cálculo:

- En una matriz cuadrada, llamaremos **matriz complementaria del elemento a_{ij}** y la representaremos M_{ij} a la matriz que queda al suprimir la fila i–ésima y la columna j–ésima en la matriz inicial (es decir la fila y la columna en que se encuentra el elemento).

  - **Ejemplo 25:**

    $$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -5 & 2 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad M_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

    M_{12} es la matriz complementaria del elemento a_{12}, que resulta de tachar la fila 1 y la columna 2.

- Se llama **menor complementario del elemento a_{ij}**, al determinante de la matriz complementaria de dicho elemento, es decir, al determinante de M_{ij}, $|M_{ij}|$

  - **Ejemplo 26:**
    El menor complementario de a_{12} es $|M_{12}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 1\cdot 3 - 2\cdot 4 = 3 - 8 = -5$

- Se llama **adjunto de un elemento (a_{ij})** y se representa por A_{ij} al menor complementario del elemento afectado por el signo $(-1)^{i+j}$ (se suman los subíndices)

  - **Ejemplo 27:** El Adjunto de a_{12} es $A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot |M_{12}| = -1\cdot(-5) = 5$

Regla: Para saber el signo del adjunto de cualquier elemento nos guiaremos por el esquema siguiente, en el que se ve que empezando por el primer término positivo, se va alternando el signo, bien horizontalmente siguiendo una fila o verticalmente siguiendo una columna:

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{vmatrix}$$

Conocidos los conceptos, veamos cómo se calculan los determinantes por este método. En primer lugar seleccionaremos la fila o columna que tenga más ceros, y a continuación desarrollaremos el determinante por los elementos de esa fila o columna.

- **Ejemplo 28:** Desarrollaremos por la primera columna, que tiene un 0 y hará más fácil el cálculo:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 5 \end{vmatrix} = -1\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} + 0\cdot(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= -1\cdot 1\cdot(5+12) + 1\cdot(-1)\cdot(10+3) + 0 = -17 - 13 = -30$$

- **Ejemplo 29**. Veamos cómo se aplican las propiedades de los determinantes para calcular el valor de un determinante de orden 4 con los menores cálculos posibles (haciendo ceros en la última columna, que ya tiene 2, y desarrollando):

3ª propiedad — 9ª propiedad ($F_3=F_3+F_4$)

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \\ 5 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{F_3=F_3+F_4}{=} 2\cdot\begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \\ 5 & -1 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$ Desarrollando por los adjuntos de la última columna y dejando el signo que se obtenga por el criterio de signos:

$$= 2\cdot 1\cdot\begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & -3 \\ 5 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot 1\cdot(-7) = -14$$

Calculando el determinante por la regla de Sarrus

5) Rango de una matriz

Se llama **submatriz de una matriz** a la matriz que queda al suprimir cualquier número de filas o de columnas de la misma (no necesariamente el mismo número de una que de otras).

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Llamaremos **menor** al determinante de cualquiera de las submatrices cuadradas que hay dentro de ella.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- **Ejemplo 30**:

$\begin{vmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{4} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{vmatrix}$ es un menor de orden 2 de la matriz anterior y $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ es un menor de orden 3.

> Se llama **rango de una matriz** al **orden del <u>mayor</u> de los menores distinto de cero** (de entre todos los menores distintos de cero que se pueden formar en una matriz, el rango de la matriz es el orden del mayor). Coincide con el <u>número de filas (o columnas) linealmente independientes</u>.

Según esta definición, el rango de una matriz (**rg A**) es un número que será menor o igual que m y que n (no puede ser mayor que el número de filas o de columnas de la matriz).
Además, las filas o columnas de una matriz son linealmente dependientes (una es combinación lineal de las otras) siempre que |A|=0.

Para hallar el rango de una matriz, podemos utilizar uno de los dos métodos siguientes:

a) Cálculo del rango de una matriz por determinantes (utilizando menores).

- **Ejemplo 31**: Hallar el rango de la matriz A = $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

- Se suprimen de la matriz las filas o columnas que tengan todos los elementos nulos (en este caso no hay).
- Se suprimen también aquellas filas o columnas que, a simple vista, sean proporcionales a otras de la matriz (en este caso, si hay, no se ven a simple vista).
- En este ejemplo, seleccionamos un menor de <u>orden 3</u>, porque el rango no puede ser superior al número de filas o de columnas de la matriz, y es una matriz 3 x 6, por lo que el rango máximo será 3 (recordemos que un menor es una submatriz cuadrada).
  - Escogemos el siguiente menor: $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ → Hay que seguir buscando.
  - Escogemos otro menor de orden 3: $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -15 \neq 0$ por lo que el **rango de A es 3**, ya que **hay un menor de orden 3 distinto de 0**.
- Si todos los menores de orden 3 hubieran dado 0, habríamos probado con todos los menores de orden 2, buscando el primer menor que distinto de cero, para ver si el rango es 2.

Este método tiene el inconveniente de que, en ocasiones, hay que resolver muchos determinantes hasta encontrar el primero que no sea nulo del mayor orden posible.

b) Cálculo del rango de una matriz por el método de Gauss.

Operaciones que no modifican el rango de una matriz:

- Intercambiar dos filas (o dos columnas).
- Multiplicar una fila (o columna) por un número distinto de cero.
- Sumar a una fila (o columna) una combinación lineal de otras filas (o columnas).
- Suprimir las filas o columnas de todo ceros o proporcionales.

➢ **Ejemplo 32**: Estudiemos el rango de la matriz del ejemplo anterior por el método de Gauss:
Por medio de las combinaciones lineales, intentaremos **conseguir ceros por debajo de la diagonal principal**, utilizando el elemento a_{11} (pivote) para hacer 0 por dejado de él, el a_{22} para hacer ceros por debajo de él... hasta llegar a una matriz de Gauss.

$$rg\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{F2=-2\cdot F1+F2}{=} rg\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & -5 & -5 & 0 & -10 & -8 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{F3=5\cdot F3+F2}{=} rg\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & -5 & -5 & 0 & -10 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 15 & -10 & -8 \end{pmatrix}$$

A continuación buscamos un menor de orden 3 que sea distinto de cero, por ejemplo:

Como el menor $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{vmatrix} = -75 \neq 0$, el **rango es 3**.

Pueden suceder dos cosas:

- **Que la última fila sea todo ceros**, en cuyo caso se elimina y rango será 2.
- Que no es toda de ceros, en cuyo caso **siempre** podemos encontrar un menor de orden 3 distinto de 0 y el rango es 3.

Utilizando el método de **Gauss**, el **rango** de una matriz **coincide** con el **número de filas que contengan algún elemento distinto de cero.**

➢ **Ejemplo 33**: Calcular el rango de la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & \cancel{0} \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & \cancel{0} \\ 1 & 3 & 3 & -1 & 2 & \cancel{0} \\ \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{0} \\ \cancel{2} & \cancel{2} & \cancel{-2} & \cancel{2} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{pmatrix}$$

– la sexta columna C6 son todo ceros y se suprime
– la cuarta fila es igual a la primera y se suprime (F4=F1)
– la quinta fila es el doble que la segunda y se suprime (F5=F2)

Haciendo Gauss, vemos que queda la última fila toda de ceros, y por tanto el rango es 2:

$$rg\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \underset{F3=F3-F1}{\overset{F2=F2-F1}{=}} rg\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \underset{F3=F3+F2}{=} rg\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

- **Ejemplo 34**: Calcular el rango de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}$

Lo resolveremos por los dos métodos:

a) **Por menores**: Veamos si el rango es 3, hallando el determinante de 3x3. Como det(A)=16+12+20-12-20-16=0, el rango de A será <3.

Estudiemos si es de rango 2, escogiendo un menor de orden 2, por ejemplo $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$ =10-6=4≠0 por lo que el **rango es 2**.

b) **Por Gauss:** Conseguimos ceros por debajo de la diagonal principal y veamos que hay una fila toda de ceros, por tanto el rango es 2 (el número de filas que quedan que no son todo ceros).

$$rg\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 8 \end{bmatrix} = rg\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = rg\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = rg\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = 2$$

- **Ejemplo 35:** Hallar el valor de a para que el rango de la matriz A = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & a & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ sea 3.

Para que el rango sea 3, el determinante de 3x3 no puede ser 0.
Por tanto, calculamos el determinante, lo igualamos a 0, y pueden ser todos los valores menos ese.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & a & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = a + 0 + 2 + a - 6 + 0 = 2a - 4$$

2a – 4 = 0 → a = 2 → Cuando a=2 → |A| = 0 y rg(A) < 3

Por tanto, para que su determinante sea de orden 3 (rg A = 3) → **a ≠ 2**

6) Cálculo de la matriz inversa

a) Método de la adjunta:

Recordemos que dada una matriz cuadrada de orden **n**, con $|A| \neq 0$, se llama **matriz inversa de A** y se representa por A^{-1} a la matriz que cumple la siguiente propiedad:

$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I_n$, donde I_n es la matriz unidad o identidad.

Solo existe inversa de A ↔ $|A| \neq 0$ (si $A = 0$ la matriz A no tiene inversa) y se calcula aplicando la siguiente **fórmula:**

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj } A^t$$

Por tanto, cuando necesitemos calcular la matriz inversa de A, procederemos del siguiente modo:

- Calculamos su **determinante**, para comprobar que $|A| \neq 0$
- A continuación calcularemos la **traspuesta** de la matriz A → $(A)^t$
- Por último, calcularemos la adjunta de la matriz traspuesta $A_{dj}(A^t)$. Se llama **adjunta de una matriz** y se representa por $A_{dj}(A)$ a la matriz resultante de sustituir cada elemento de la matriz por su adjunto respectivo, y aplicaremos la fórmula: $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj } A^t$

Nota: Es indiferente calcular la adjunta de la traspuesta **Adj (A^t)** o la traspuesta de la adjunta **Adj $(A)^t$**

➢ **Ejemplo 36:** Hallar la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

Calculamos el determinante de A para ver si la matriz tiene inversa:

$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 4 = 2 \neq 0$ → La matriz A tiene inversa, y se calcula $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj } A^t$

$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ Calculamos la traspuesta: $A^t = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ (vemos que es simétrica, y $A = A^t$)

Calculamos los adjuntos, recordando el criterio de signos:

$A_{11} = |2|$ $A_{12} = -|2|$

$A_{21} = -|2|$ $A_{22} = |3|$ y la matriz adjunta de la traspuesta será $\text{Adj } A^t = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

Por tanto, la matriz inversa será: $A^{-1} = \dfrac{\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}}{2} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3/2 \end{pmatrix}$

- **Ejemplo 37:** Hallar la matriz inversa de A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Sol: En primer lugar se calcula el determinante de A, para ver si es invertible.

$|A| = 3 + 0 + 0 - 0 + 2 + 6 = 11 \rightarrow |A| \neq 0$, existe inversa., que se calcula: $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj } A^t$

Si hallamos A^t y le llamamos B, tendremos:

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} = B$$ y calculamos el Adj B:

Para hallar la $Adj\ B$ debemos hallar los adjuntos de cada elemento de B (acordándonos del criterio de signos), que son:

$$B_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 5 \qquad B_{12} = -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \qquad B_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

$$B_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -6 \qquad B_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \qquad B_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

$$B_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \qquad B_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -2 \qquad B_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

Luego la inversa es: $A^{-1} = \frac{1}{11} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ -6 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{11} & \frac{3}{11} & \frac{1}{11} \\ \frac{-6}{11} & \frac{3}{11} & \frac{1}{11} \\ \frac{4}{11} & \frac{-2}{11} & \frac{3}{11} \end{pmatrix}$

Como **ejercicio**, y para comprobar que el resultado es correcto, el producto de la matriz obtenida A^{-1} por la matriz dada A debe dar la matriz identidad (I_n)

b) Método directo (multiplicando matrices)

Se resuelve un sistema de ecuaciones sabiendo que $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I_n$

- **Ejemplo 38**: Hallar la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

Como A_{2x2}, la matriz A^{-1} también será 2x2, y la definimos: $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Como $A \cdot A^{-1} = I \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3a+2c & 3b+2d \\ 2a+2c & 2b+2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Y equiparando términos, ya que las dos matrices han de ser iguales (en el siguiente tema repasaremos la resolución de ecuaciones):

$\left.\begin{matrix} 3a+2c=1 \\ 2a+2c=0 \end{matrix}\right\} \rightarrow a=1 \text{ y } c=-1$

$\left.\begin{matrix} 3b+2d=0 \\ 2b+2d=1 \end{matrix}\right\} \rightarrow b=-1 \text{ y } d=3/2$ Por tanto: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3/2 \end{pmatrix}$

c) Método de Gauss-Jordan

Sea A una matriz cuadrada de orden n. Para calcular A^{-1} seguiremos los siguientes pasos:
Construimos una matriz del tipo (A | I), es decir, A está en la mitad izquierda y la matriz identidad I en la derecha, separadas por una barra:

➢ **Ejemplo 39**: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

La ampliamos con la matriz identidad del mismo orden: $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

Utilizando el método Gauss en la matriz (A | I) vamos a transformar la mitad izquierda A en la matriz identidad, y la matriz que resulte en el lado derecho (donde inicialmente está la matriz identidad) será la matriz inversa A^{-1}. Esquemáticamente: $(A \mid I) \xrightarrow{\text{operaciones elementales}} (I \mid A^{-1})$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) F_2 = F_2 - F_1 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) F3 = F3 + F2 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$F2 = F2 - F3 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \quad F1 = F1 + F2 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$F2 = (-1)\,F2 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \text{ y por tanto } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- **Propiedades de la matriz inversa:**

  - ✓ La inversa de una matriz, si existe, es **única**.
  - ✓ La inversa de la inversa es la matriz original, es decir: $(A^{-1})^{-1} = A$
  - ✓ La inversa del producto de dos matrices es el producto de sus inversas pero invirtiendo el orden, es decir: $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$
  - ✓ $(k \cdot A)^{-1} = k^{-1} \cdot A^{-1}$
  - ✓ El determinante de la matriz inversa coincide con el inverso del determinante de la matriz original, es decir: $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

7) Ejercicios propuestos

Suma y resta de matrices

1. Dada las siguientes matrices, calcula A – B

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \; B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}$$

2. Calcula la operación indicada con las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$$

3. Calcula la operación indicada con las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

4. Calcula la operación indicada con las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 & -1 \\ +2 & -5 & +5 \\ +7 & -8 & +1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 & +2 & -5 \\ -1 & +2 & +6 \\ -4 & +3 & +2 \end{pmatrix}$$

5. Calcula la operación indicada con las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$$

6. Calcula la operación indicada con las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

7. Calcula la operación indicada con las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 & -1 \\ +2 & -5 & +5 \\ +7 & -8 & +1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -7 & +2 & -5 \\ -1 & +2 & +6 \\ -4 & +3 & +2 \end{pmatrix}$$

8. Dada las siguientes matrices, calcula A – B y A + B

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Operaciones básicas de matrices

Ejercicio 1.-

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, calcula:

a) $-2A + 3B$ b) $\frac{1}{2} A \cdot B$ c) $B \cdot (-A)$ d) $A \cdot A - B \cdot B$

Ejercicio 2.-

Efectúa el producto $\begin{pmatrix} -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 3.-

a) ¿Son iguales las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}$?

b) Halla, si es posible, las matrices AB; BA; $A + B$; $A^t - B$.

Ejercicio 4.-

Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ comprueba que:

a) $(A + B)^t = A^t + B^t$

b) $(3A)^t = 3A^t$

Ejercicio 5.-

Calcula $3AA^t - 2I$, siendo $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 6.-

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, comprueba que $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$.

Ejercicio 7.-

Calcula, en cada caso, la matriz B que verifica la igualdad:

a) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} + B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

b) $2\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} - 3B = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Determinantes de matrices

1. Calcula los siguientes determinantes de 2x2:

a) $\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}$ **d)** $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$

2. Calcula los siguientes determinantes de 3x3:

a) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \end{vmatrix}$

3. Calcula los siguientes determinantes de 3x3:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & -3 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ **d)** $\begin{vmatrix} 2\sqrt{3} & 2 & 4\sqrt{3} \\ -1 & -\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}$

4. Calcula los siguientes determinantes de 4x4:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 5 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 4 & 1 & 1 & a \end{vmatrix}$

5. Determina para qué valores de m se anulan los siguientes determinantes.

a) $\begin{vmatrix} m & m & m \\ m & 0 & m \\ m & m & m \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & m+1 & 5 \\ 1 & m+2 & -3 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ m & 0 & -1 \\ -6 & -1 & 0 \end{vmatrix}$

6. Calcula $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2d & 2e & 2f \\ 3g & 3h & 3i \end{vmatrix}$ si $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 10.$

7. Sabiendo que se cumple $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = k$ utiliza las propiedades de los determinantes para calcular:

a) $\begin{vmatrix} b & c & a \\ e & f & d \\ h & i & g \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} -e & -f & -d \\ -b & -c & -a \\ -h & -i & -g \end{vmatrix}$

8. Calcula $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$ sabiendo que $\begin{vmatrix} -d & -e & -f \\ -a & -b & -c \\ -g & -h & -i \end{vmatrix} = 100.$

9. Utiliza las propiedades de los determinantes para calcular este determinante:

$$\begin{vmatrix} x & 2x+1 & 3x+2 \\ x & 2x+3 & 3x+4 \\ x & 2x+5 & 3x+4 \end{vmatrix}$$

Rangos de matrices

1. Calcula el rango de las siguientes matrices

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix} 1 & a & 2a \\ 2 & a & 3a \\ 3 & 2a & 4a \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & a & 2a \\ 2 & a & 3a \\ 3 & a & 4a \end{pmatrix}$ **e)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 & 6 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 7 \\ 1 & 6 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ **f)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2. Sea la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & m \\ 0 & m & 3 \end{pmatrix}$ Determina los valores de m para los cuales rango (A)< 3. ¿Puede ser rg(A) = 1 para algún valor de m?

3. Estudia el rango de la matriz A en función de los valores del parámetro m:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & m & 2m \\ m & 2 & 2+m \end{pmatrix}$$

4. Estudia el rango de las siguientes matrices según el valor del parámetro que aparece en ellas:

a) $A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & a \end{vmatrix}$ b) $B = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ -1 & 2a & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$

c) $C = \begin{vmatrix} 2 & -1 & a \\ a & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$ d) $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}$

5. Calcula el rango de estas matrices en función del parámetro t:

a) $A = \begin{pmatrix} t & 1 & 1 & 2 \\ 2 & t & t^2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} t & t & 0 \\ 2 & t+1 & t-1 \\ 2t+1 & 0 & -t-3 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} 3-t & 3 & 2t \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2+t \\ t+2 & 0 & t \end{pmatrix}$

6. Calcula el rango de las siguientes matrices:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 10 & -8 \end{pmatrix}$

$C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 8 & 7 & 9 & 4 \end{pmatrix}$

7. Sea A una matriz de dos filas y dos columnas cuyo rango es 2. ¿Puede variar su rango si le añadimos una fila o una columna?

8. Una matriz de 3 filas y 3 columnas tiene rango 3.

a) ¿Cómo puede variar el rango si quitamos una columna?
b) Si suprimimos una fila y una columna, ¿podemos asegurar que el rango de la matriz resultante será 2?

Matriz Inversa

1. Calcula las inversas de las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 6 & -2 \\ -2 & 12 & -5 \\ -1 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

2. Calcula, utilizando el método de Gauss, la inversa de cada una de las siguientes matrices o averigua que no la tiene:

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{b)} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{c)} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$$

3. Calcula la inversa de cada una de las siguientes matrices o averigua que no la tiene:

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad \text{b)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{c)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, prueba cuál de las siguientes matrices es su inversa:

$$M = \begin{pmatrix} 3/2 & 3/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

5. Halla las matrices inversas de:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

6. Aplica el método de Gauss-Jordan para calcular las inversas de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

7. Dada la siguiente matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ¿tiene inversa? Razona la respuesta.

8. Calcula por el método de Gauss la matriz inversa de las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -6 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

9. ¿Para qué valores de **m** la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ m & 0 & -1 \\ 6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ no admite matriz inversa?

10. Calcular la inversa de A mediante el método de la matriz adjunta:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Bibliografía

- Matemáticas (Acceso a la Universidad) – Editorial Sanz y Torres (M. E. Ballvé y otros)
- Matemáticas I – COU Opciones A y B – Editorial ECIR (A. Ramírez, R. Esteve, F. del Valle, J.A. Armero)
- www.segundoperez.es
- www.vitutor.es
- www.bertoblog.es