TEMA 2: SISTEMAS DE ECUACIONES

1) Ecuaciones lineales

Llamaremos **ecuación lineal** con *n* incógnitas a la siguiente igualdad:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$$

Donde a_i números reales y se llaman **coeficientes**
x_i números reales desconocidos, y son las **incógnitas** de la ecuación
b_i número real y es el **término independiente** (si b=0 se llama ecuación **homogénea**)

En una ecuación lineal, todas las incógnitas tienen grado 1.

- **Ejemplo 1**:
  $7x - 5 = 0$ Ecuación lineal con 1 incógnita
  $2x + 5y - 7z = 8$ Ecuación lineal con 3 incógnitas

No son, por tanto, ecuaciones lineales los siguientes ejemplos: $3xy - 5x = 9$
$x^2 - 2x + 5 = 9$

Llamaremos **solución de una ecuación lineal** a *n* números reales ordenados $(c_1, c_2, \dots, c_n) \in R^n$ tal que al sustituir x_1 por c_1, x_2 por c_2, …, x_n por c_n se cumple la igualdad.

- **Ejemplo 2**: En la ecuación $3x + 2y = 5$, el punto (1,1) es solución, porque $3\cdot1 + 2\cdot1 = 5$, pero también lo es el punto (0,5/2) porque $3\cdot0 + 2\cdot5/2 = 5$… Una única ecuación con más una incógnita tiene ∞ soluciones.

2) Sistemas de ecuaciones lineales. Solución y clasificación

Se llama **sistema de *m* ecuaciones lineales con *n* incógnitas** al conjunto de *m* ecuaciones siguientes:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\}$$

$a_{ij} \in R \rightarrow$ **coeficientes** del sistema
$x_j \rightarrow$ **incógnitas** (n incógnitas)
$b_i \in R \rightarrow$ **términos independientes**

En general en vez de x_1, x_2, x_3 las incógnitas se denominan **x, y , z** y el sistema queda de la forma:

$$\left.\begin{aligned} 2x - 3y + z &= -5 \\ x - y \quad\; &= -1 \\ x - 2y - z &= -2 \end{aligned}\right\}$$

(x, y, z) es una **solución del sistema** si lo es simultáneamente de cada una de las ecuaciones del sistema.

Un sistema de ecuaciones es **homogéneo** cuando sus términos independientes son todos nulos. El sistema siguiente es homogéneo:

$$\left.\begin{aligned} 2x - 3y + z &= 0 \\ x - y \quad\; &= 0 \\ x - 2y - z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

CLASIFICACIÓN DE SISTEMAS EN FUNCIÓN DEL Nº DE SOLUCIONES

- SISTEMAS
  - COMPATIBLES *tienen solución*
    - DETERMINADOS (SCD) *Una única solución*
    - INDETERMINADOS (SCI) *Infinitas soluciones*
  - INCOMPATIBLES (SI) *no tienen solución*

Como vemos, no es posible que un sistema de ecuaciones lineales tenga, por ejemplo dos soluciones, ya que solo puede suceder que no tenga solución, que tenga 1 solución o que tenga infinitas soluciones.

Resolver un sistema significa <u>hallar las soluciones</u>, y **discutir un sistema** significa <u>clasificarlo</u>, es decir, deducir a qué categoría de las tres pertenece.

3) Matrices asociadas a un sistema de ecuaciones

Dado un sistema de **m ecuaciones lineales** con **n incógnitas**:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}\,x_2 + \ldots + a_{1n}\,x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}\,x_2 + \ldots + a_{2n}\,x_n = b_2 \\ . \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad . \\ . \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad . \\ . \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}\,x_2 + \ldots + a_{mn}\,x_n = b_m \end{array}\right\}$$

$a_{ij} \in R$ → **coeficientes** del sistema
x_j → **incógnitas** (n incógnitas)
$b_i \in R$ → **términos independientes**

Llamaremos **matriz de los coeficientes A** a la matriz con los coeficientes de las incógnitas del sistema:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \ldots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{mn} & a_{mn} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Llamaremos **matriz ampliada A*** (o **A | B**) a la matriz de los coeficientes a la que se le añade la columna de los términos independientes separada por una línea discontinua, **matriz de las incógnitas X** a la matriz columna X y **matriz de los términos** independientes B a la matriz columna **B**.

$$A|B = A^* = \left(\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & \ldots & a_{3n} & b_3 \\ & & & & \\ a_{mn} & a_{mn} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \\ x_m \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \\ b_m \end{bmatrix}$$

- **Ejemplo 3**: Dado el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 2x - y - 3z = 1 \\ -x + 2y - z = 5 \\ 3x + y + z = 1 \end{array}\right\}$$

La matriz de los coeficientes es: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y la ampliada: $A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 2 & -1 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$

Nota: Para hallar las matrices asociadas a un sistema, las incógnitas deben estar escritas en el mismo orden en cada una de las ecuaciones.

4) Expresión matricial de un sistema de ecuaciones lineales

Un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas puede representarse matricialmente de la forma siguiente:

$$\underset{m \times n}{\overset{A}{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{mn} & a_{mn} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}}} \cdot \underset{n \times 1}{\overset{X}{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}} = \underset{m \times 1}{\overset{B}{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}}$$

Nota: Si se multiplica la matriz **A** por la matriz **X** y se iguala el resultado a la matriz **B**, elemento a elemento, obtenemos las *m* ecuaciones del sistema.

- **Ejemplo 4**:

$$\left.\begin{array}{l} 2x + 3y + 4z = 1 \\ -3x + y - z = 2 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -3 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

→ Expresión matricial del sistema

5) Sistemas equivalentes

Dos sistemas se dice que son **equivalentes** cuando tienen exactamente las mismas soluciones.

Deben tener el mismo número de incógnitas, aunque no es necesario que tengan el mismo número de ecuaciones.

Definición: Si un sistema está formado por las ecuaciones $E_1, E_2, \dots, E_m$, se dice que la ecuación $a \cdot E_1 + b \cdot E_2 + \dots + h \cdot E_m$, donde *a, b,..., h* son números reales cualesquiera, es una **combinación lineal** de dichas ecuaciones.

- **Ejemplo 5**: Dado el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 2x - 3y + z = -5 \\ x - y \quad = -1 \\ x - 2y - z = -2 \end{array}\right\}$$

la ecuación que sale al operar $2 \cdot E_1 + E_2 - E_3$ será:

$2.(2x - 3y + z = -5) + 1.(x - y = -1) + (-1).(x - 2y - z = -2)$

$4x - 5y + 3z = -9$ → Esta ecuación se dice que es una **combinación lineal de las anteriores.**

Es decir, una combinación lineal de ecuaciones es otra ecuación que se obtiene sumando las otras ecuaciones del sistema multiplicadas por ciertos números reales, alguno de los cuales puede ser 0 (esto equivale a no utilizar en la combinación lineal alguna de las ecuaciones)

Obtención de sistemas equivalentes

1. Al multiplicar o dividir una o más ecuaciones de un sistema por un número distinto de 0, el sistema resultante es equivalente al primero, porque si en una ecuación se multiplican ambos miembros por un mismo número, las soluciones de la ecuación resultante no varían.
   Por ejemplo, si multiplicamos por 5 ambos miembros de la ecuación $3x + 2y = 5$, tenemos que $15x + 10y = 25$
   Las soluciones anteriores $(1, 1)$ y $(3, -2)$ lo siguen siendo (basta sustituir y comprobar)
2. Al cambiar el orden de dos o más ecuaciones de un sistema, el sistema resultante es equivalente al primero.
3. Al cambiar el orden de las incógnitas en una o varias ecuaciones el sistema resultante es igual al primero.
4. Si una ecuación es combinación lineal de las otras, <u>puede suprimirse</u> y el sistema resultante es equivalente al primero.
5. Si una de las ecuaciones de un sistema se sustituye por otra resultante de multiplicarla por un número real distinto de 0 y <u>sumarle una combinación lineal de las otras</u>, el sistema obtenido es equivalente al primero. Ejemplo:

$$\left.\begin{aligned} 2x - 3y + z &= -5 \\ x - y + z &= -2 \\ x - 2y - z &= -2 \end{aligned}\right\}$$

La solución del sistema siguiente es $(1, 2, -1)$ es decir, $x = 1, y = 2$ y $z = -1$

Si sustituimos la segunda ecuación por: $2.2^{a} - 1.1^{a} + 1.3^{a}$, es decir, $E_2 \to 2 \cdot E_2 - E_1 + E_3$ queda:

$2.E_2$	2	−2	2	−4
$-1.E_1$	−2	+3	−1	+5
$2.E_2 - E_1$	0	1	1	1
$1.E_3$	1	−2	−1	−2
$2.E_2 - E_1 + E_3$	1	−1	0	−1

$$\left.\begin{aligned} 2x - 3y + z &= -5 \\ x - y \quad &= -1 \\ x - 2y - z &= -2 \end{aligned}\right\}$$

Se puede comprobar, sustituyendo la solución inicial (1, 2, −1) en el nuevo sistema, que sigue siendo solución, luego los dos sistemas son equivalentes.

6) Métodos de resolución de sistemas

a) Métodos ya conocidos

Método de resolución por sustitución

El método de sustitución consiste en despejar de una de las incógnitas de una de las ecuaciones, y sustituir el valor obtenido en las otras ecuaciones. Con ello se consigue convertir el sistema original en otro sistema equivalente de una ecuación y una incógnita menos (se suelen elegir la ecuación y la incógnita que más faciliten la tarea a la hora de despejar).

- **Ejemplo 6:**

$$\left.\begin{array}{r} 2x-3y+z=-5 \\ x-y+z=-2 \\ x-2y-z=-2 \end{array}\right\}$$

1° Despejamos la *x* en la segunda ecuación: $x=y-z-2$

2° Sustituimos la *x* en la 1ª y en la 3ª ecuación: $\left.\begin{array}{r} 2\cdot(y-z-2)-3y+z=-5 \\ (y-z-2)-2y-z=-2 \end{array}\right\}$

Operando y simplificando queda:

$$\left.\begin{array}{r} 2y-2z-4-3y+z=-5 \\ y-z-2-2y-z=-2 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} -y-z=-1 \\ -y-2z=0 \end{array}\right\}$$

Ahora repetimos la operación despejando la *y* en la primera ecuación y sustituyendo en la segunda:

$-y=z-1 \longrightarrow y=-z+1$, y sustituyendo en la 2ª queda:

$-(-z+1)-2z=0 \longrightarrow z-1-2z=0 \longrightarrow -z-1=0$

Por tanto: $\mathbf{z=-1}$

Sustituyendo este valor en la ecuación $y=-z+1$, queda $y=1+1 \longrightarrow \mathbf{y=2}$ y sustituyendo los valores de *z* e *y* hallados en la ecuación $x=y-z-2$, queda $x=2+1-2 \longrightarrow \mathbf{x=1}$

La solución es: **x = 1, y = 2, z = −1**, o lo que es lo mismo **(1, 2, −1)**

Método de resolución por igualación

El método de igualación consiste en despejar la misma incógnita en dos ecuaciones e igualar su valor, con lo que desaparece dicha incógnita.

- **Ejemplo 7**: Resolver el siguiente sistema por el método de igualación.

$$\left.\begin{array}{r} 2x+3y=1 \\ -x+2y=3 \end{array}\right\}$$

Despejamos en la primera ecuación la variable y: $2x+3y=1 \Rightarrow 3y=1-2x \Rightarrow y=\dfrac{1-2x}{3}$

Hacemos lo mismo en la segunda ecuación: $-x+2y=3 \Rightarrow 2y=3+x \Rightarrow y=\dfrac{3+x}{2}$

Igualamos los dos resultados, quedando: $\dfrac{1-2x}{3}=\dfrac{3+x}{2}$

Obtenemos así una ecuación lineal con una incógnita. La resolvemos multiplicando en cruz: $2(1-2x)=3(3+x) \Rightarrow 2-4x=9+3x \Rightarrow -7x=7 \Rightarrow x=-1$

Como $y=\dfrac{3+x}{2}$, sustituimos el valor de $x=-1$ y obtenemos $y=\dfrac{3-1}{2}=1$

Por tanto la solución del sistema es **x = –1, y = 1**, es decir **(–1,1)**

Método de resolución por reducción

Consiste en sustituir una de las ecuaciones por otra que sea combinación lineal de los demás y que tenga una incógnita menos.

Ej. Resolvamos el mismo sistema del apartado anterior, pero ahora por reducción:

$$\left.\begin{array}{r} 2x+3y=1 \\ -x+2y=3 \end{array}\right\} \underset{E_2 \to 2\cdot E_2}{\Rightarrow} \left.\begin{array}{r} 2x+3y=1 \\ -2x+4y=6 \end{array}\right\} \underset{E_2 \to E_1+E_2}{\Rightarrow} \left.\begin{array}{r} 2x+3y=1 \\ 7y=7 \end{array}\right\} \Rightarrow y=1$$

Sustituyendo el valor obtenido de y en la primera ecuación del sistema, queda:

$2x+3\cdot 1=1 \Rightarrow 2x=-2 \Rightarrow x=-1$ La solución, por tanto, es **x = –1, y = 1**

- Ejemplo 8:

Resuelve los sistemas matriciales siguientes.

a) $\left.\begin{array}{r} 2X+Y=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ X-Y=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} X+Y=\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \\ 3Y-X=\begin{pmatrix} -2 & 8 \\ 12 & 2 \end{pmatrix} \end{array}\right\}$

a)
$$\begin{aligned} 2X+Y &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ + \quad X-Y &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \\ \hline 3X &= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \to X = \begin{pmatrix} 2/3 & 1 \\ 4/3 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$Y = \begin{pmatrix} 2/3 & 1 \\ 4/3 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 & -2 \\ -11/3 & 3 \end{pmatrix}$$

b)
$$\begin{aligned} X+Y &= \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \\ + \quad -X+3Y &= \begin{pmatrix} -2 & 8 \\ 12 & 2 \end{pmatrix} \\ \hline 4Y &= \begin{pmatrix} 0 & 12 \\ -16 & 4 \end{pmatrix} \to Y = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 12 \\ -16 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Método de Gauss

El método de Gauss consiste en obtener de un sistema, a partir de las transformaciones vistas en el apartado anterior, un **sistema equivalente y escalonado,** en el que en la segunda ecuación se elimine la incógnita ***x***, en la tercera las incógnitas ***x*** e ***y***, etc... hasta llegar, en el caso de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, a un sistema en el que la última ecuación sólo tiene una incógnita, la ***z***.

Así, de la última ecuación se despeja la incógnita z, y su valor se sustituye en la segunda, hallando el valor de *y*, y estos valores se sustituyen en la primera, hallando el valor de *x*.

Para su aplicación utilizaremos la **matriz ampliada A*** que, como hemos visto, es la matriz de los coeficientes del sistema a la que se le añade la columna de los términos independientes, separada por una línea discontinua.

- **Ejemplo 9:** Halla la solución (x, y, z) del sistema: $\left.\begin{aligned} -x+y-z &= 1 \\ x+2y+z &= 2 \\ x+3y-z &= 0 \end{aligned}\right\}$

La matriz ampliada es:

$$\left(\begin{array}{ccc:c} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Al aplicar el método de Gauss para resolver este sistema, se deja la primera fila de la matriz, y se opera con ella, multiplicándola por los números adecuados para que, al sumarla a las filas posteriores, se eliminen todos los coeficientes que hay debajo de a_{11}. Se repite el proceso para eliminar los elementos que hay debajo de a_{22}, y si hubiera más de tres filas, seguiríamos haciendo ceros por debajo de todos los términos de la diagonal $a_{ii:}$

$\left.\begin{array}{l} -x+y-z=1 \\ x+2y+z=2 \\ x+3y-z=0 \end{array}\right\}$ Matriz ampliada $\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F3 = F3+F1]{F2 = F2+F1} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & -2 & 1 \end{array}\right)$

$\xrightarrow{F2 = \frac{1}{3}\cdot F2} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F3 = -4\cdot F2 + F3} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \end{array}\right)$ y se escribe el sistema equivalente con sus incógnitas:

$\left.\begin{array}{r} x+y-z=1 \\ y\quad =1 \\ -2z=-3 \end{array}\right\}$

Se despeja z: ➔ $z = 3/2$

Se sustituye z en la F2 y se despeja y: ➔ $y = 1$

Se sustituyen los valores de z e y en la F1 y se despeja x: ➔ $x = -3/2$

Por tanto la solución del sistema es: **$x = -3/2$ $y = 1$ $z = 3/2$**

Nota: Conviene tener como elemento pivote a_{11} de la matriz los números 1 o –1 para facilitar los cálculos. Si hay algún 1 ó –1, intercambiamos las filas

- **Ejemplo 10**: Halla la solución (x, y, z) del sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{r} 2x+y+2z = 6 \\ x-2y+3z = 1 \\ -x-2y+z = -3 \end{array}\right\}$$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 6 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & -3 \end{array}\right)$ Ordenamos las filas, colocando la que tiene un 1 en el lugar de la x como primera fila. $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 2 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow[F3 = (-2)F1 + F3]{F2 = F2 + F1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & 4 & -2 \\ 0 & 5 & -4 & 4 \end{array}\right)$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 6 \end{array}\right)$ y se resuelve el sistema equivalente: $\left.\begin{array}{r} \mathbf{x-2y+3z = 1} \\ \mathbf{-4y+4z = -2} \\ \mathbf{4z = 6} \end{array}\right\}$ ➔ **$z = 6/4$** ➔ $z = 3/2$

Sustituyendo el valor de *z* en la segunda ecuación queda: $-4y + 4\cdot(3/2) = -2$

$-4y + 6 = -2$ ➔ $y = 2$

Finalmente, sustituyendo el valor de z e y en la primera ecuación:

$x - 4 + 9/2 = 1$

$x = 5 - 9/2 \rightarrow x = 1/2$

$$\boxed{\text{Solución: } x = 1/2 \quad y = 2 \quad z = 3/2}$$

- **Ejemplo 11:**

$$\left.\begin{aligned} 2x - y - 3z &= 1 \\ -x + 2y - z &= 5 \\ 3x + y + z &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc:c} -1 & 2 & -1 & 5 \\ 2 & -1 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \xRightarrow[F3=F3+3F1]{F2=F2+2F1} \left[\begin{array}{ccc:c} -1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & -5 & 11 \\ 0 & 7 & -2 & 16 \end{array}\right] \xRightarrow[F3=7F2-3F3]{} \left[\begin{array}{ccc:c} -1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & -5 & 11 \\ 0 & 0 & -29 & 29 \end{array}\right]$$

$$\left.\begin{aligned} -x + 2y - z &= 5 \\ 3y - 5z &= 11 \\ -29z &= 29 \end{aligned}\right\} \quad z = \frac{29}{-29} = -1 \rightarrow \text{Sustituyendo z en la 2ª ecuación: } 3y - 5(-1) = 11 \rightarrow y = 2$$

$\rightarrow$ Sustituyendo z e y en la primera ecuación: $-x + 2\cdot 2 - (-1) = 5 \rightarrow x = 0$

$$\boxed{\text{Solución: } x = 0 \quad y = 2 \quad z = -1}$$

Por el método de Gauss sabemos que:

- El sistema es **incompatible** (no tiene solución) siempre que una de las filas sea toda de ceros excepto el término independiente).

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right) \rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x + y + 2z = 6 \\ 2y + 3z = 1 \\ 0z = -3 \end{array}\right\} \rightarrow \text{No tiene solución}$$

- El sistema será **compatible determinado** (1 solución) si tiene el mismo número de ecuaciones que de incógnitas:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 6 \end{array}\right) \quad \left.\begin{array}{r} x - 2y + 3z = 1 \\ -4y + 4z = -2 \\ 4z = 6 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Solución única: } x = 1/2 \;\; y = 2 \;\; z = 3/2$$

$$\rightarrow \mathbf{(1/2, 2, 3/2)}$$

- El sistema será **compatible indeterminado** (∞ soluciones) si tiene una fila toda de ceros, porque tiene menos ecuaciones que incógnitas, y a una de las incógnitas se le da el valor de λ.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \left.\begin{array}{r} x - 2y + 3z = 1 \\ -4y + 4z = -2 \\ 0z = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x - 2y + 3z = 1 \\ -4y + 4z = -2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \rightarrow \infty \text{ soluciones,} \\ \text{dependiendo del valor de } \lambda \end{array}$$

Si $z = \lambda$ →Sustituyendo en la segunda ecuación: $-4y + 4\lambda = -2 \rightarrow y = \frac{-2-4\lambda}{-4} = \frac{1}{2} + \lambda$

Y en la primera ecuación: $x - 2\cdot(\frac{1}{2} + \lambda) + 3\lambda = 1 \rightarrow x = 2 - 2\lambda$

Las infinitas soluciones son $\rightarrow \boldsymbol{(2-2\lambda, \frac{1}{2} + \lambda, \lambda)}, \quad \forall \lambda \in \mathbf{R}$

c) Regla de Cramer

Un sistema de ecuaciones AX=B de dice que es **"de Cramer"** cuando tiene el <u>mismo número de ecuaciones que de incógnitas y el determinante de la matriz de los coeficientes es distinto de 0</u>:

$$\text{Sistema de Cramer} \iff |A| \neq 0 \quad \text{y} \quad m = n$$

Todos los sistemas de Cramer tienen una **única solución** (son <u>sistemas compatible determinados</u>) que se calcula mediante la **Regla de Cramer**: La incógnita x_i se calcula como cociente de dos determinantes: en el denominador, el determinante de la matriz de los coeficientes $|A| \neq 0$ y en el numerador el determinante resultante de sustituir la columna i-ésima del determinante $|A|$ por la columna de términos independientes.

- **Ejemplo 12**: Encuentra la solución del siguiente sistema por Cramer:

$$\left.\begin{array}{r} 2x - y + z = \boxed{3} \\ x + 3y - 2z = \boxed{0} \\ 4x - 3y + z = \boxed{1} \end{array}\right\} \quad |A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 4 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 6 + 8 - 3 - 12 + 1 - 12 = -12 \neq 0$$

(es un sistema de Cramer)

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix}}{-12} = \frac{9-0+2-3+0-18}{-12} = \frac{-10}{-12} = \frac{5}{6}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-12} = \frac{0+1-24-0-3+4}{-12} = \frac{-22}{-12} = \frac{11}{6}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \end{vmatrix}}{-12} = \frac{6-9-36+1}{-12} = \frac{-38}{-12} = \frac{19}{6}$$

d) Método de la matriz inversa

Podemos estudiar los sistemas matriciales gracias al concepto de matriz inversa. Sea una expresión matricial **A·X=B**, como por definición de la matriz inversa se cumple que **$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$**, si multiplicamos <u>por la izquierda</u> ambos miembros de la ecuación por A^{-1}:

$\underbrace{A^{-1} \cdot A}_{} \cdot X = A^{-1} \cdot B$

$I \cdot X = A^{-1} \cdot B$

$X = A^{-1} \cdot B$ → Para calcular la matriz X, calculamos la inversa de A y la multiplicamos por B.

Si nuestra expresión matricial es **X·A = B**, si multiplicamos <u>por la derecha</u> ambos miembros de la ecuación por A^{-1}:

$X \cdot \underbrace{A \cdot A^{-1}}_{} = B \cdot A^{-1}$

$X \cdot I = B \cdot A^{-1}$

$X = B \cdot A^{-1}$ → Para calcular la matriz X, calculamos la inversa de A y multiplicamos B por A^{-1}.

- **Ejemplo 13**: Resuelve la ecuación matricial $AX = BX + C$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

<u>Método de la matriz inversa:</u> Despejamos la matriz X de la ecuación, y como $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$, es decir, el producto de una matriz por su inversa da la matriz identidad:

$$AX - BX = C \rightarrow (A - B)\cdot X = C \rightarrow (A-B)^{-1}\cdot(A - B)\cdot X = (A - B)^{-1}\cdot C \rightarrow I\cdot X = (A-B)^{-1}\cdot C \rightarrow$$

$$\rightarrow X = (A - B)^{-1}\cdot C \rightarrow X = D^{-1}\cdot C$$

Si llamamos $D = A - B$, hay que calcular la matriz D y su inversa, para multiplicarla por C.

$$D = A - B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$$

$|D| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = -2 + 3 = 1 \neq 0 \rightarrow$ Existe D^{-1} y se calcula $D^{-1} = \frac{1}{|D|} \cdot Adj\ D^t$

Calculamos la traspuesta: $D^t = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Calculamos los adjuntos, recordando el criterio de signos:

$A_{11} = |-1| \quad A_{12} = -|1|$

$A_{21} = -|-3| \quad A_{22} = |2|$ y la matriz adjunta de la traspuesta será $Adj\ D^t = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

Por tanto, la matriz inversa será: $D^{-1} = \dfrac{\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

Calculamos $X = D^{-1}\cdot C \rightarrow X = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + 1 \\ 0 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

<u>Método directo</u>: Como la matriz C es 2x1 y el producto de $B\cdot X$ también ha de ser 2x1 para poderla sumar a C, la matriz X ha de ser 2x1. La definiremos $X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ y así:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Operando: $\begin{pmatrix} -a + 2b \\ -2a + b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3a + b \\ a + 2b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} -a + 2b \\ -2a + b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3a + b \\ a + 2b - 1 \end{pmatrix}$$

Equiparando términos:

$$\begin{cases} -a+2b=-3a+b \rightarrow 2a=-b \rightarrow 2a=-(-3a+1) \rightarrow 2a=3a-1 \rightarrow a=1 \\ -2a+b=a+2b-1 \rightarrow -3a=b-1 \rightarrow b=-3a+1 \qquad b=-3\cdot 1+1=-2 \end{cases}$$

Por tanto la matriz $X=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$

- **Ejemplo 14:** Despeja la matriz X que cumple la ecuación matricial $AX - X = BX + C$.

Como $A\cdot A^{-1}= A^{-1}\cdot A = I$ (el producto de una matriz por su inversa da la matriz identidad):

$AX - X = BX + C \rightarrow$ Pasamos al mismo lado todos los términos con X

$AX - X - BX = C \rightarrow$ Sacamos factor común

$(A - I - B)\cdot X = C \rightarrow$ Multiplicamos por la izquierda por $(A - I - B)^{-1}$ a ambos lados:

$(A - I - B)^{-1}\cdot (A - I - B)\cdot X = (A - I - B)^{-1}\cdot C$

$I\cdot X = (A - I - B)^{-1}\cdot C$

$X = (A - I - B)^{-1}\cdot C$

Si llamamos $D = (A - I - B) \rightarrow$ Calculamos D^{-1} y la multiplicamos por la matriz C.

- **Ejemplo 15:** Despeja la matriz X que cumple la ecuación matricial $AX = 2X - B$

$AX = 2X - B \rightarrow$ Pasamos al mismo lado todos los términos con X.

$AX - 2X = -B \rightarrow$ Sacamos factor común.

$(A-2I)\cdot X = -B \rightarrow$ Multiplicamos por la izquierda por $(A-2I)^{-1}$ a ambos lados de la ecuación:

$(A-2I)^{-1}\cdot (A-2I)\cdot X =(A-2I)^{-1}\cdot(-B) \rightarrow$ Como $A\cdot A^{-1}= A^{-1}\cdot A = I$

$I\cdot X = (A-2I)^{-1}\cdot (-B)$

$X = (A-2I)^{-1}\cdot (-B)$

- **Ejemplo 16:** Despeja la matriz X que cumple la ecuación matricial $A^{-1}XA=B$

$A^{-1}XA=B \rightarrow$ Multiplicamos por la izquierda por A y por la derecha por A^{-1} a ambos lados.

$A\cdot A^{-1}XA\cdot A^{-1}=A\cdot B\cdot A^{-1} \rightarrow$ Como $A\cdot A^{-1}= A^{-1}\cdot A = I$

$I\cdot X\cdot I = A\cdot B\cdot A^{-1}$

$X = A\cdot B\cdot A^{-1}$

- **Ejemplo 17:**

Calcula la matriz:

$$X=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

que verifica la ecuación matricial $AXB=C$, siendo:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & -8 \end{pmatrix}$$

$$AXB=C \rightarrow AX=CB^{-1} \rightarrow X=A^{-1}CB^{-1}$$

$$|A|=1\neq 0 \rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|B|=5\neq 0 \rightarrow B^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & -8 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \frac{6}{5} & -\frac{14}{5} \end{pmatrix}$$

- **Ejemplo 18:**

Dadas las matrices: $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 0 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}$

se pide:

a) Calcular la matriz inversa de A y la matriz inversa de B.

b) Hallar la matriz X tal que $AXB=C$.

c) Calcular la matriz X.

a) $|A|=2\neq 0 \rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix}$

$|B|=3\neq 0 \rightarrow B^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

b) $AXB=C \rightarrow AX=CB^{-1} \rightarrow X=A^{-1}CB^{-1}$

c) $X=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 0 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

7) Clasificación de los sistemas: Teorema de Rouché-Fröbenius

El Teorema de Roché-Fröbenius permite clasificar todos los sistemas a partir del rango de la matriz de coeficientes A (rg A) y del rango de la matriz ampliada A* (rg A*), y afirma que:

- Si rgA ≠ rg A* → el sistema es **incompatible** SI → no tiene solución
- Si rgA = rg A* = n (nº de incógnitas) → el sistema es **compatible determinado** SCD → 1 solución
- Si rgA = rg A* < n (nº de incógnitas) → el sistema es **compatible indeterminado** SCI → ∞ soluciones

Si el sistema es <u>compatible</u>, podremos calcular la solución o soluciones por el **método de Cramer.**

Sistemas homogéneos: Como hemos visto antes, los sistemas homogéneos son los que todos los términos independientes valen 0, y por tanto siempre tendrán la solución trivial (x=y=z=0) si son SCD y, si tienen infinitas soluciones, la trivial será una de ellas.

Esquemáticamente:

SISTEMA
- COMPATIBLE *(tiene solución)* **rg A = rg A***
  - DETERMINADO (SCD) *(solución única)* **rg A = rg A* =n**
  - INDETERMINADO (SCI) *(infinitas soluciones)* **rg A = rg A* < n**
- INCOMPATIBLE (SI) *(no tiene solución)* **rg A ≠ rg A|B**

➢ **Ejemplo 19**: Discutir y resolver, si es posible, el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 2x + y + z = 1 \\ x + 2y + z = 1 \\ x + y + 2z = 1 \end{array}\right\}$$

Sol: Estudiamos el rango de la matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ calculando su determinante:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \rightarrow Rg(A) = 3$$

Estudiamos el rango de la matriz ampliada $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$, que coincide con rg (A) = 3, porque el mayor menor que podemos escoger ha de ser de 3x3, y elegimos el correspondiente a la matriz A, pues ya sabemos que su determinante es distinto de cero y por tanto su rango es 3.

Además, el número de incógnitas n también es 3 (incógnitas x, y, z).

Por tanto, por el **Teorema de Roché-Fröbenius**, como **rg A = rg A* = n = 3**, el sistema es compatible determinado **SCD**, y tiene **una única solución** que podemos calcular por **Cramer**:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{1}{4} \; ; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{1}{4} \; ; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{1}{4} \rightarrow \text{Solución: } \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$$

- **Ejemplo 20**: Discutir el siguiente sistema en función del parámetro m:

$$\left.\begin{aligned} x + my + 3z &= 2 \\ x - y - 2z &= 3 \\ mx + y + z &= 5 \end{aligned}\right\}$$

Lo primero que hacemos es calcular el determinante de la matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & m & 3 \\ 1 & -1 & -2 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & m & 3 \\ 1 & -1 & -2 \\ m & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 3 - 2m^2 + 3m + 2 - m = -2m^2 + 2m + 4$$

Calculamos los valores de a que anulan el determinante: $-2m^2 + 2m + 4 = 0$

Si resolvemos la ecuación de 2° grado: $\left.\begin{aligned} m &= -1 \\ m &= 2 \end{aligned}\right\}$ $|A| = 0$ para $m = -1$ y $m = 2$

Estudiamos los casos que se pueden dar:

- Si **m ≠ −1** y m ≠ **2**:

  Como |A| ≠ 0 → **rg A = rg A* = 3 = nº de incógnitas**, por el **Teorema de Roché-Fröbenius** es sistema es **SCD**, y tendrá una **única solución**, que calcularemos por **Cramer**:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & m & 3 \\ 3 & -1 & -2 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-13m+26}{-2m^2+2m+4}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \\ m & 5 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-13m+26}{-2m^2+2m+4}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & m & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ m & 1 & 5 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{3m^2-3m-6}{-2m^2+2m+4} = \frac{3(m+1)(m-2)}{-2(m+1)(m-2)} = -\frac{3}{2}$$

$$\text{solución: } \left(\frac{-13m+26}{-2m^2+2m+4}, \frac{-13m+26}{-2m^2+2m+4}, -\frac{3}{2}\right)$$

- Si **m = −1:**

Estudiamos el rango de A y de A*, sustituyendo m por −1:

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ → rg A <3, porque |A|=0. Veamos si es 2, escogiendo un menor de orden 2 y estudiando su determinante: $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 2 + 3 = 5 \neq 0$ → rg A = 2

$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 5 \end{array}\right)$ → Estudiamos el rango de A*, empezando por los distintos menores de orden 3, a ver si alguno es ≠ 0: $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 5 \end{vmatrix}$ = -5+2+3-2-3+5 = 0

Probamos con otro menor: $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & 5 \end{vmatrix}$ = −10−9+2−4−3−15 = −39 ≠ 0 → rg A* = 3

Como **rg A ≠ rg A***, por el **Teorema de Roché-Fröbenius** el sistema es incompatible y no tiene solución.

- Si **m = 2**:

Estudiamos el rango de A y de A*, sustituyendo m por 2:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ → rg A <3, porque |A|=0. Veamos si es 2, escogiendo un menor de orden 2 y estudiando su determinante: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$ = −1 − 2 = − 3 ≠ 0 → rg A = 2

$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \end{array}\right)$ → Estudiamos el rango de A*, empezando por los distintos menores de orden 3, a ver si alguno es ≠ 0: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$ = 0

Probamos con otro menor: $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$ = 0

Y por último probamos con el menor que nos falta: $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix}$ = 0

Como todos los menores de orden tres han dado cero, probamos con un menor de orden 2, y si escogemos el mismo que en A, vemos que rg A* = 2.

Por tanto, **rg A = rg A* = 2 < 3 incógnitas**, por el **Teorema de Roché-Fröbenius** → El sistema es un sistema compatible indeterminado **SCI,** con grado de indeterminación 3 – 2 = 1, y tendrá infinitas soluciones. Para calcularlas, <u>eliminamos la fila que hemos descartado</u> para el cálculo del determinante ≠ 0 de orden 2, y <u>llamamos λ a la incógnita que tampoco hemos utilizado</u>. En nuestro caso, las dos ecuaciones a utilizar son las 2 primeras, y la incógnita a la que daremos el valor de λ será z.

Así:

$$\left.\begin{array}{l} x + 2y + 3z = 2 \\ x - y - 2z = 3 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{como } z=\lambda} \left.\begin{array}{l} x + 2y = 2 - 3\lambda \\ x - y = 3 + 2\lambda \end{array}\right\}$$

y aplicamos la regla de Cramer, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $A^* = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2-3\lambda \\ 1 & -1 & 3+2\lambda \end{array}\right)$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2-3\lambda & 2 \\ 3+2\lambda & -1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-(2-3\lambda)-2(3+2\lambda)}{-3} = \frac{-2+3\lambda-6-4\lambda}{-3} = \frac{-8-\lambda}{-3} = \frac{8+\lambda}{3}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2-3\lambda \\ 1 & 3+2\lambda \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{(3+2\lambda)-(2-3\lambda)}{-3} = \frac{3+2\lambda-2+3\lambda}{-3} = \frac{1+5\lambda}{-3} = -\frac{1+5\lambda}{3}$$

$z = \lambda$

Solución: $\left(\frac{8+\lambda}{3}, -\frac{1+5\lambda}{3}, \lambda\right)$, $\forall \lambda \in \mathbf{R}$

Nota: Este apartado también se puede resolver por sustitución, igualación o reducción. Así:

$$\left.\begin{array}{l} x+2y+3z=2 \\ x-y-2z=3 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{como } z=\lambda} \left.\begin{array}{l} x+2y=2-3\lambda \\ x-y=3+2\lambda \end{array}\right\} \begin{array}{l} \rightarrow x+2y=2-3\lambda \\ \cdot(-1) \rightarrow -x+y=-3-2\lambda \end{array}$$

$$3y = -1-5\lambda \rightarrow y = -\frac{1+5\lambda}{3}$$

Sustituyendo en una de las dos ecuaciones y despejando x:

$$x = 2-3\lambda-2y = 2-3\lambda-2\cdot\left(-\frac{1+5\lambda}{3}\right) \rightarrow x = 2-3\lambda+\frac{2+10\lambda}{3} = \frac{6-9\lambda+2+10\lambda}{3} = \frac{8+\lambda}{3}$$

- **Ejemplo 21**: Discutir el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro a:

$$\left.\begin{array}{l} ax+y+z=a \\ x+ay+z=a \\ x+y+az=a \end{array}\right\}$$

Sol: Lo primero que hacemos es calcular el determinante de la matriz de coeficientes $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a^3+1+1-a-a-a = a^3-3a+2$$

Calculamos los valores de a que anulan el determinante: $a^3-3a+2=0$

Por Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & & 1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & 0 \end{array} \rightarrow a^2+a-2=0 \rightarrow \text{resolvemos la ecuación de 2° grado: } \begin{array}{l} a=1 \\ a=-2 \end{array}$$

Luego las 3 soluciones son $a = 1$, $a = 1$ y $a = -2$ → Para estos valores, $|A|=0$, por tanto:

- Si $a \neq 1$ y $a \neq -2$:

  Como $|A| \neq 0$ → **rg A = rg A* = 3 = nº de incógnitas**, por el **Teorema de Roché-Fröbenius** es sistema es **SCD**, y tendrá una **única solución**, que calcularemos por **Cramer**:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ a & a & 1 \\ a & 1 & a \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{a^3+a+a-a^2-a-a^2}{a^3-3a\quad+2} = \frac{a^3-2a^2+a}{(a-1)^2(a+2)} = \frac{a(a^2-2a+1)}{(a-1)^2(a+2)} = \frac{a(a-1)^2}{(a-1)^2(a+2)} = \frac{a}{a+2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & a & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & a & a \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{a^3+a+a-a-a^2-a^2}{a^3-3a\quad+2} = \frac{a^3-2a^2+a}{(a-1)^2(a+2)} = \frac{a(a^2-2a+1)}{(a-1)^2(a+2)} = \frac{a(a-1)^2}{(a-1)^2(a+2)} = \frac{a}{a+2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & a \\ 1 & a & a \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{a^3+a+a-a^2-a-a^2}{a^3-3a\quad+2} = \frac{a^3-2a^2+a}{(a-1)^2(a+2)} = \frac{a(a^2-2a+1)}{(a-1)^2(a+2)} = \frac{a(a-1)^2}{(a-1)^2(a+2)} = \frac{a}{a+2}$$

Solución: $\left(\frac{a}{a+2}, \frac{a}{a+2}, \frac{a}{a+2}\right)$

- Si **a = 1:**

Estudiamos el rango de A y de A*, sustituyendo a por 1:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ → El rango de A es 1, porque las 3 filas son iguales → rg A = 1

$A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$ → El rango de A* es 1, porque las 3 filas son iguales → rg A* = 1

Por tanto, **rg A = rg A* = 1 < 3 incógnitas**, por el **Teorema de Roché-Fröbenius** → El sistema es un sistema compatible indeterminado **SCI,** con grado de indeterminación 3 – 1 = 2 (tendrá 2 parámetros: λ y μ) y tendrá infinitas soluciones. Para calcularlas, hacemos:

$z = \lambda$

$y = \mu$

y de una de las ecuaciones (son las 3 iguales): $x + y + z = 1$ → $x + \lambda + \mu = 1$ → $x = 1 - \lambda - \mu$

Solución: $(1 - \lambda - \mu, \mu, \lambda)$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbf{R}$

- Si **a = −2**:

Estudiamos el rango de A y de A*, sustituyendo a por −2:

$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ → rg A <3, porque |A|=0. Veamos si es 2, escogiendo un menor de orden 2 y estudiando su determinante: $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 \neq 0$ → rg A = 2

$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \end{array}\right)$ → Estudiamos el rango de A*, empezando por los distintos menores de orden 3, a ver si alguno es ≠ 0: $\begin{vmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$ =-8 -2-2-4-4+2= -18 ≠0 → rg A* = 3

Como **rg A ≠ rg A*,** por el **Teorema de Roché-Fröbenius** el sistema es incompatible y no tiene solución.

8) Planteamiento de los sistemas de ecuaciones

Cuando nos dan un <u>enunciado</u> en vez de las ecuaciones ya planteadas:

- Se identifican las incógnitas (leer el enunciado con detenimiento).
- Se expresa el enunciado del problema mediante un sistema de ecuaciones.
- Se resuelve el sistema por el método que cada uno considere (Gauss o Cramer).
- Se comprueban las soluciones.

➢ **Ejemplo 22:** De una caja que contiene piezas de los tipos A y B <u>se desea determinar su peso y el peso de cada una de las piezas</u>. Para ello se sabe que:

- Dos cajas y una pieza A pesan 19 Kg.
- Una pieza A y una caja de la cual se han extraído dos piezas B pesa 6 Kg.
- Tres cajas, una pieza A y tres piezas B pesan 34 Kg.

Identificamos las incógnitas A = "peso de una pieza del tipo A"
B = "peso de una pieza del tipo B"
C = "peso de una caja"

Planteamos el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} A \quad\quad + 2C = 19 \\ A - 2B + C = 6 \\ A + 3B + 3C = 34 \end{array}\right\}$$

Resolvemos el sistema por el método de Gauss, haciendo ceros por debajo de la diagonal principal:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 19 \\ 1 & -2 & 1 & 6 \\ 1 & 3 & 3 & 34 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ F1\cdot(-1)+F2 \\ F1\cdot(-1)+F3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 19 \\ 0 & -2 & -1 & -13 \\ 0 & 3 & 1 & 15 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} 3\cdot F2 \\ 2\cdot F3 \\ \text{La F3 ahora es:} \end{array} \quad \begin{array}{ccc|c} 0 & -6 & -3 & -39 \\ 0 & 6 & 2 & 30 \\ \hline 0 & 0 & -1 & -9 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 19 \\ 0 & -2 & -1 & -13 \\ 0 & 0 & -1 & 9 \end{array}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} A \quad\quad + 2C = 19 \\ -2B - C = -13 \\ \quad\quad -C = -9 \end{array}\right\} \quad \mathbf{C = 9}$$

$$\begin{array}{l} -2B - 9 = -13 \\ -2B = -13 + 9 \\ -2B = -4 \\ \mathbf{B = 2} \end{array} \qquad \begin{array}{l} A + 2.\,9 = 19 \\ A + 18 = 19 \\ A = 19 - 18 \\ \mathbf{A = 1} \end{array}$$

Solución: La pieza A pesa 1 Kg, la pieza B pesa 2 Kg y la caja pesa 9 Kg.

- Ejemplo 23:

Una inmobiliaria ha vendido un total de 65 plazas de garaje entre urbanizaciones diferentes. Las ganancias por la venta de una plaza de garaje en la urbanización A son de 2.000 euros, 4.000 euros por una en la urbanización B y 6.000 por una en la urbanización C. Se sabe que se han vendido un 50% más de plazas en la urbanización A que en la urbanización C. Calcula el número de plazas de garaje vendidas en cada urbanización sabiendo que el beneficio por las vendidas en la urbanización C es igual a la suma de los beneficios obtenidos por las vendidas en las urbanizaciones A y B.

Solución:

Utilizamos como incógnitas,

x = nº de plazas de garaje vendidas en la urb. A

y = nº de plazas de garaje vendidas en la urb. B

z = nº de plazas de garaje vendidas en la urb. C

De las frases del problema obtenemos las ecuaciones,

"ha vendido un total de 65 plazas", $x + y + z = 65$

"se han vendido un 50% más de plazas en la urbanización A que en la urbanización C", $x = 1{,}5\ z$; $x - 1{,}5\ z = 0$

"el beneficio por las vendidas en la urbanización C es igual a la suma de los beneficios obtenidos por las vendidas en las urbanizaciones A y B", $6000\ z = 2000\ x + 4000\ y$; $6\ z = 2\ x + 4\ y$; $3\ z = x + 2\ y$; $x + 2\ y - 3\ z = 0$

El sistema a resolver será,

$$\begin{cases} x+y+z=65 \\ x+2y-3z=0 \\ x-1{,}5z=0 \end{cases}$$

como $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & -1{,}5 \end{vmatrix} = -3-3-2+1{,}5 = -6{,}5 \neq 0$

el sistema tiene solución

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 65 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -1{,}5 \end{vmatrix}}{-6{,}5} = \frac{-3\,.\,65}{-6{,}5} = 30$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 65 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1{,}5 \end{vmatrix}}{-6{,}5} = \frac{-65\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -1{,}5 \end{vmatrix}}{-6{,}5} = \frac{-65\,(-1{,}5+3)}{-6{,}5} = \frac{-65\,.\,1{,}5}{-6{,}5} = 15$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 65 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{-6{,}5} = \frac{-65\ .\,2}{-6{,}5} = 20$$

Solución: ha vendido 30 plazas de garaje en la urbanización A, 15 en la B y 20 en la C.

- Ejemplo 24:

Antonio ha conseguido 1372 euros trabajando durante las vacaciones. Ese dinero puede gastarlo íntegramente comprando un ordenador portátil, una cámara y haciendo un viaje. El precio del ordenador portátil excede en 140 euros a la suma de los precios de la cámara y el viaje. Teniendo en cuenta que el precio de un segundo acompañante para el viaje es la mitad que el precio inicial, Antonio podría invitar a su hermano al viaje en caso de que no se comprara la cámara digital y todavía le quedarían 208 euros. Calcula los precios del ordenador, de la cámara y del viaje.

Solución:

Utilizamos como incógnitas,
x = precio del ordenador
y = precio de la cámara
z = precio del viaje

De las frases del problema obtenemos las ecuaciones,
"Antono ha conseguido 1372 €… Este dinero puede gastarlo íntegramente comprando …", $x + y + z = 1372$
"El precio del ordenador portátil excede en 140 € a la suma de los precios de la cámara y el viaje", $x = y + z + 140$; $x - y - z = 140$
"Teniendo en cuenta que el precio de un segundo acompañante para el viaje es la mitad que el precio inicial, Antonio podría invitar a su hermanos al viaje en caso de que no se comprara la cámara digital y todavía le quedarían 208 euros", $x + z + z/2 + 208 = 1372$; $2x + 2z + z + 416 = 2744$: $2x + 3z = 2744 - 416$; $2x + 3z = 2328$

El sistema a resolver será,

$$\begin{cases} x+y+z=1372 \\ x-y-z=140 \\ 2x+3z=2328 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema por el método de Gauss,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1372 \\ 1 & -1 & -1 & 140 \\ 2 & 0 & 3 & 2328 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ F_2-F_1 \\ F_3-2xF_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1372 \\ 0 & -2 & -2 & -1232 \\ 0 & -2 & 1 & -416 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ F_3-F_{21} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1372 \\ 0 & -2 & -2 & -1232 \\ 0 & 0 & 3 & 816 \end{array}\right)$$

$$F_3 \to \quad 3z=816 \to z=\frac{816}{3}=272$$

$$\begin{aligned} F_2 \to \quad & -2y-2z=-1232 \\ & y+z=616 \\ & y+272=616 \\ & y=616-272=344 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_1 \to \quad & x+y+z=1372 \\ & x+344+272=1372 \\ & x=1372-344-272=756 \end{aligned}$$

Solución: el ordenador le costó 756€, la cámara 344€ y el viaje 272€

- Ejemplo 25:

Un grupo de personas se reúne para ir de excursión, juntándose un total de 20 entre hombres, mujeres y niños. Contando hombres y mujeres juntos, su número resulta ser el triple que el número de niños. Además, si hubiera acudido una mujer más, su número igualaría al de hombres.

a) Plantear un sistema para averiguar cuántos hombres, mujeres y niños han ido de excursión.

b) Resolver el problema.

a) Sean x, y, z los hombres, las mujeres y los niños que se han reunido, respectivamente.

$$\left.\begin{aligned} x+y+z&=20\\ x+y&=3z\\ y+1&=x \end{aligned}\right\}$$

b) $$\left.\begin{aligned} x+y+z&=20\\ x+y-3z&=0\\ x-y&=1 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} x+y+z&=20\\ -4z&=-20\\ x-y&=1 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left\{\begin{aligned} &x+y=15\\ &z=5\\ &x-y=1 \end{aligned}\right.$$

$$\left.\begin{aligned} x+y&=15\\ z&=5\\ 2y&=14 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left\{\begin{aligned} &x=8\\ &y=7\\ &z=5 \end{aligned}\right.$$

9) Ejercicios propuestos

Clasificación de los sistemas

1. Escribe la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada de los siguientes sistemas:

a) $$\left.\begin{aligned} 3x+2y+z&=3\\ 2x-6y&=12\\ 2x-3y+2z&=0 \end{aligned}\right\}$$

b) $$\left.\begin{aligned} 2x-y&=21\\ 3x-3y&=12 \end{aligned}\right\}$$

c) $$\left.\begin{aligned} 2x-2y+7z&=0\\ 3y-5z&=12\\ x-y-z&=1 \end{aligned}\right\}$$

2. Enuncia el Teorema de Rouché-Frobenius

3. Comprueba que el sistema $\left.\begin{array}{r} 3x - 2y + z = 20 \\ x + 3z = 14 \\ y - z = -4 \end{array}\right\}$ es compatible determinado y que, por tanto, tendrá una única solución (x, y, z).

Resolución de sistemas

1. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones por sustitución:

a) $\left.\begin{array}{r} 3x + 5y = 15 \\ 2x - 3y = -9 \end{array}\right]$ b) $\left.\begin{array}{r} x + 2y = 1 \\ -3x + y = -10 \end{array}\right]$ c) $\left.\begin{array}{r} -x + 2y = 4 \\ 2x - y = 3 \end{array}\right]$

Comprueba que da lo mismo por los otros dos métodos.

2. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones por reducción:

a) $\left.\begin{array}{r} 4x + 6y = 2 \\ 6x + 5y = 1 \end{array}\right]$ b) $\left.\begin{array}{r} 5y - y = 3 \\ -2x + 4y = -12 \end{array}\right]$

Comprueba que te da lo mismo por los otros dos métodos.

3. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones por igualación:

$$\left.\begin{array}{r} 5x - 2y = 2 \\ x + 2y = 2 \end{array}\right]$$

Comprueba que da lo mismo por los otros dos métodos.

4. Resuelve el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{2(x+4)}{3} - \dfrac{y}{2} = \dfrac{9}{2} \\ x + 2y - \dfrac{1}{3}(3x-2) = -\dfrac{4}{3} \end{cases}$$

5. Resuelve el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{2(x+1)}{3} - y = -3 \\ 3(x+5-y)+3x = 12 \end{cases}$$

6. Resuelve el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{2x-1}{2} + \dfrac{y-3}{3} = \dfrac{11}{6} \\ -\dfrac{2x}{5} + \dfrac{y-1}{10} = -\dfrac{6}{5} \end{cases}$$

Resolución de sistemas por Cramer

1. Resuelve los siguientes sistemas por Cramer y comprueba en cada caso la solución.

a) $\begin{cases} 3x - 5y = 73 \\ 4x + 2y = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5x + 4y = 33 \\ 7x - 11y = 13 \end{cases}$

2. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones por Cramer y comprueba la solución:

a) $\begin{cases} 3x - 2y + z = 20 \\ x + 3z = 14 \\ y - z = -4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x - y + z = 1 \\ x - 2y = 2 \end{cases}$

3. Utilizando la regla de Cramer, resuelve el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x - 3y + 5z = -24 \\ 2x - y + 4z = -8 \\ x + y = 9 \end{cases}$$

Discusión de sistemas – T. Rouché Frobenius

1. Aplica el teorema de Rouché Frobenius para saber si los siguientes sistemas con compatibles o incompatibles:

$$a)\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ x + 3y = -2 \\ 2x - y = 3 \end{cases} \qquad b)\begin{cases} 4x + 5y = 7 \\ 2x - y = 0 \\ 7x + 11y = 4 \end{cases} \qquad c)\begin{cases} x + y + 2z = 7 \\ 3x - y + 4t = 1 \\ x - 3y - 4z + 4t = 6 \end{cases}$$

2. Aplica el teorema de Rouché Frobenius para saber si los siguientes sistemas con compatibles o incompatibles:

$$a)\begin{cases} x + 3y - z = 1 \\ 2x + z = 2 \\ 2y - z = 0 \end{cases} \qquad b)\begin{cases} x + 3y - z = 1 \\ 2x + z = 2 \\ 2y - z = 5 \end{cases} \qquad c)\begin{cases} x + y + 2z = 7 \\ 3x - y + 4t = 1 \\ x - 3y - 4z + 4t = -13 \end{cases}$$

3. Encuentra el valor de a para que el siguiente sistema sea compatible:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ x + 2y = 1 \\ ax + y = 3 \end{cases}$$

4. Discute los siguientes sistemas en función de los parámetros a y k:

$$a)\begin{cases} x + y + az = 0 \\ ax - y = -1 \\ x + 4y + 6z = 0 \end{cases}$$

$$b)\begin{cases} x + y = k \\ kx - y = 13 \\ 5x + 3y = 16 \end{cases}$$

5. Discute los siguientes sistemas según el valor del parámetro m:

a) $\begin{cases} mx + y + z = 4 \\ x + y + z = m \\ x - y + mz = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y + z = m - 1 \\ 2x + y + mz = m \\ x + my + z = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ x + my + z = 0 \\ 2x + 3y + 4z = 2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + my + z = 4 \\ x + 3y + z = 5 \\ mx + y + z = 4 \end{cases}$

Discusión y resolución de sistemas – T. Rouché Frobenius

1. Discute y resuelve los siguientes sistemas homogéneos:

a) $\begin{cases} 3x - 5y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y - z = 0 \\ x + y + 3z = 0 \\ x - 5y - 9z = 0 \end{cases}$

2. Discute y resuelve los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} x - y + 3z = 1 \\ 3x - y + 2z = 3 \\ -2y + 7z = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y + 3z = 1 \\ 3x - y + 2z = 3 \\ -2y + 7z = 10 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y = 3 \\ y + z = 5 \\ x + z = 4 \\ 5x - y + z = 6 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x + 4y = 4 \\ 2x + 6y = 23 \\ -2x + 3y = 1 \end{cases}$

3. Discute y resuelve, en función del parámetro a, el siguiente sistema:

$$\begin{cases} (a-1)x + y = 0 \\ (a-1)x + (a+1)y = 0 \end{cases}$$

4. ¿Existe algún valor de a y b para el cual los siguientes sistemas tengan infinitas soluciones? Resuélvelo para esos valores.

a) $\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = b \\ x + y + az = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} ax + y + z = 4 \\ x + y + z = -b \\ x - ay + z = b \end{cases}$

5. Discute y resuelve en función de a:

$$\begin{cases} (a+1)x + 2y + z = a + 3 \\ ax + y \qquad = a \\ ax + 3y + z = a + 2 \end{cases}$$

6. Discute y resuelve en función de a:

a) $\begin{cases} ax + 7y + 20z = 1 \\ ax + 8y + 23z = 1 \\ x - az = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ ax = 2 \\ ay + 2z = 0 \end{cases}$

7. Discute y resuelve en función de m:

a) $\begin{cases} \lambda x + 2z = 0 \\ \lambda y - z = \lambda \\ x + 3y + z = 5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} (m+2)x + (m-1)y - z = 3 \\ mx - y + z = 2 \\ x + my - z = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \lambda x + 3y + z = \lambda \\ x + \lambda y + \lambda z = 1 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} mx + y + z = 2 \\ 2x + my + m^2 z = 1 \\ 2x + y + z = 2 \end{cases}$

8. Discute y resuelve, en función del parámetro a, los siguientes sistemas homogéneos:

a) $\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x + 2y - 3z = 0 \\ 3x - 4y - az = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ ax + 2z = 0 \\ 2x - y + az = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} ax + y - z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ 3x + 10y + 4z = 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x + 3y - z = 0 \\ 4x + 2y - az = 0 \\ 3x + 4y + 6z = 0 \end{cases}$

Ecuaciones matriciales

1. **Escribe las ecuaciones lineales del sistema $AX = B$ siendo:**

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **y** $B = \begin{pmatrix} 11 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$, **y resuélvelo.**

2. **Resuelve la ecuación $AXB = C$ siendo:**

$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

3. **Dadas las matrices:**

$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} -8 \\ -2 \end{pmatrix}$

halla la matriz X que verifica $(AB^t + C)X = D$.

4. **Halla, en cada caso, la matriz X que verifica la igualdad:**

a) $A^{-1} X A = B$ **b)** $(A + X)B = I$

siendo $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ **y** $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

5. **Determina una matriz A para que el sistema homogéneo $AX = 0$ sea equivalente a la ecuación matricial:**

$$(x \ \ y \ \ z)\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = (0 \ \ 0)$$

6. Obtén la matriz X que verifica:

$$2\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}X - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

7. Determina las matrices X e Y que satisfacen las relaciones siguientes:

$$\left.\begin{array}{l} X + 2Y = A^t + B \\ X - Y = AB \end{array}\right\}$$

donde A^t representa la matriz traspuesta de A y las matrices A y B son

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Planteamiento y resolución de problemas

1. Una persona adquirió en el mercado cierta cantidad de unidades de memoria externa, de lectores de libros electrónicos y de tabletas gráficas a un precio de 100, 120 y 150 euros la unidad, respectivamente. El importe total de la compra fue de 1160 euros y el número total de unidades adquiridas 9. Además, compró una unidad más de tabletas gráficas que de lectores de libros electrónicos. ¿Cuántas unidades adquirió de cada producto?

2. Después de aplicar un descuento del 10% a cada uno de los precios originales, se ha pagado por un rotulador, un cuaderno y una carpeta 3,96 euros. Se sabe que el precio del cuaderno es la mitad del precio del rotulador y que el precio de la carpeta es igual al precio del cuaderno más el 20% del precio del rotulador. Calcula el precio original de cada objeto.

3. Cierta persona invierte un total de 7000 € en acciones de las empresas A y B y en un depósito a 12 meses al 1 %. Pasado un año, vende sus acciones, obteniendo una rentabilidad del 5 % en las acciones de la empresa A y del 3 % en las de B. El beneficio total de sus tres inversiones es 202 €. Determina qué cantidad destinó a cada inversión si sabemos que el dinero total destinado a comprar acciones superó en 2600 € al dinero del depósito.

4. En una sucursal de una agencia de viajes se vende un total de 60 billetes de avión con destino a Londres, París y Roma. Sabiendo que el número de billetes para París es el doble de los vendidos para los otros dos destinos conjuntamente y que para Roma se emiten dos billetes más que la mitad de los vendidos para Londres, ¿cuántos billetes se han vendido para cada uno de los destinos?

5. Un comerciante compró 200 kilos de melocotones, 100 de manzanas y 300 de peras. Los vende incrementando un 25% el precio de los melocotones y de las manzanas y un 40% el de las peras. Por la venta de todo el género obtuvo 1087 euros de los que 257 fueron beneficio. Sabiendo que el precio de compra del kilo de melocotones fue 50 céntimos más caro que el del kilo de peras, ¿cuál fue el precio de compra del kilo de cada una de las frutas?

6. Un estudiante obtuvo una calificación de 7,5 puntos en un examen de tres preguntas. En la tercera pregunta obtuvo un punto más que en la segunda y los puntos que consiguió en la primera pregunta quintuplicaron la diferencia entre la puntuación obtenida en la tercera y primera preguntas. ¿Cuál fue la puntuación obtenida en cada una de las preguntas?

7. Un inversor decidió invertir un total de 42000 € entre tres productos:

a) Una cuenta de ahorros por la que recibe unos intereses anuales del 5%.
b) Un depósito a plazo fijo por el que le pagan unos intereses anuales del 7%.
c) Unos bonos con unos intereses anuales del 9%.

Al cabo de un año, los intereses le han proporcionado un beneficio de 2600 €.
Si los intereses que ha recibido de la cuenta de ahorros son 200 € menos que la suma de los intereses que ha percibido por las otras dos inversiones, ¿qué cantidad invirtió en cada producto?

Bibliografía

- Matemáticas (Acceso a la Universidad) – Editorial Sanz y Torres (M. E. Ballvé y otros)
- Matemáticas I – COU Opciones A y B – Editorial ECIR (A. Ramírez, R. Esteve, F. del Valle, J.A. Armero)
- Matemáticas II, 2° Bachillerato – Editorial Santillana (Ejercicios)
- www.segundoperez.es
- www.vitutor.es