MATRICES.

1º/ Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} x & 0 & 1 \\ y & 1 & 0 \\ 3 & -2 & z \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 11 & -6 & -1 \\ -6 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, determinar los valores *x*, *y*, *z* que hacen posible la igualdad $A \cdot B = A + C$.

2º/ Determinar las matrices *A* y *B* que verifican:

$$2\mathrm{A} - B = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 7 \\ 6 & 0 & -3 \end{pmatrix} \qquad A + 2\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

3º/ Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, hallar las matrices *X* que verifique: $A \cdot X = X \cdot A$.

4º/ Sean las matrices

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Determine la dimensión de la matriz *M* para que pueda efectuarse el producto *A·M·C*.

b) Determine la dimensión de la matriz *N* para que $C^t \cdot N$ sea una matriz cuadrada.

c) Calcula $A^t \cdot B \cdot C^t$.

5º/ Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, halla A^3 , A^5 y A^n .

6º/Calcula A^{2000} , siendo $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

7º/ Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, halla A^{2004} .

8º/ Determine los valores x e y que hacen cierta la siguiente igualdad:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad .$$

9º/ Calcula el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 3 & 6 & 9 \\ -5 & -10 & m \end{pmatrix}$ según los valores del parámetro real m.

10º/ Determina dos matrices X e Y tales que:

$$3X - 2Y = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 8 & -1 \end{pmatrix} \qquad\qquad 4X - 3Y = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad .$$

SOLUCIONES:

1º/ Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} x & 0 & 1 \\ y & 1 & 0 \\ 3 & -2 & z \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 11 & -6 & -1 \\ -6 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, determinar los valores *x*, *y*, *z* que hacen posible la igualdad $A\cdot B=A+C$.

$$A\cdot B=A+C$$

Desarrollamos esta igualdad:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} x & 0 & 1 \\ y & 1 & 0 \\ 3 & -2 & z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 11 & -6 & -1 \\ -6 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2\text{x}+y & 1 & 2 \\ -x+9 & -6 & -1+3\text{z} \\ x+y-6 & 5 & 1-2\text{z} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 10 & -6 & 2 \\ -5 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

Igualando los coeficientes de ambas matrices, obtenemos las ecuaciones:

(1) $2\text{x}+y=0$	(4) $-x+9=10$	(7) $x+y-6=-5$
(2) $1=1$	(5) $-6=-6$	(8) $5=5$
(3) $2=2$	(6) $-1+3\text{z}=2$	(9) $1-2\text{z}=-1$

Las ecuaciones (2), (3), (5) y (8), evidentemente se cumplen cualesquiera que sean los valores de las incógnitas.

De la ecuación (4) : $-x+9=10\Rightarrow -x=10-9\Rightarrow -x=1\Rightarrow x=-1$

De la ecuación (6) : $-1+3\text{z}=2\Rightarrow 3\text{z}=2+1\Rightarrow z=\frac{3}{3}\Rightarrow z=1$

De la ecuación (1): $2\text{x}+y=0\Rightarrow 2\cdot(-1)+y=0\Rightarrow -2+y=0\Rightarrow y=2$

Luego la solución es *x*=-1, *y*=2, *z*=1, y las ecuaciones (7) y (9) se cumplen para estos valores.

2º/ Determinar las matrices A y B que verifican:

$$2A-B=\begin{pmatrix}-4 & 1 & 7\\ 6 & 0 & -3\end{pmatrix} \qquad A+2B=\begin{pmatrix}3 & -2 & -4\\ 3 & 5 & 1\end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned}2A-B&=\begin{pmatrix}-4 & 1 & 7\\ 6 & 0 & -3\end{pmatrix}=C\\ A+2B&=\begin{pmatrix}3 & -2 & -4\\ 3 & 5 & 1\end{pmatrix}=D\end{aligned}\right\}$$

Eliminamos A:

$$\left.\begin{aligned}2A-B&=C\\ A+2B&=D\end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned}2A-B&=C\\ -2\cdot(A+2B&=D)\end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned}2A-B&=C\\ -2A-4B&=-2D\end{aligned}\right\}$$

$$-5B=C-2D\Rightarrow B=\frac{-1}{5}(C-2D)$$

$$B=\frac{-1}{5}(C-2D)=\frac{-1}{5}\cdot\left[\begin{pmatrix}-4 & 1 & 7\\ 6 & 0 & -3\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}3 & -2 & -4\\ 3 & 5 & 1\end{pmatrix}\right]=\frac{-1}{5}\cdot\begin{pmatrix}-10 & 5 & 15\\ 0 & -10 & -5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -1 & -3\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

Eliminamos B:

$$\left.\begin{aligned}2A-B&=C\\ A+2B&=D\end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned}2\cdot(2A-B&=C)\\ A+2B&=D\end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned}4A-2B&=2C\\ A+2B&=D\end{aligned}\right\}$$

$$5A=2C+D\Rightarrow A=\frac{1}{5}(2C+D)$$

$$A=\frac{1}{5}(2C+D)=\frac{1}{5}\cdot\left[2\cdot\begin{pmatrix}-4 & 1 & 7\\ 6 & 0 & -3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & -2 & -4\\ 3 & 5 & 1\end{pmatrix}\right]=\frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix}-5 & 0 & 10\\ 15 & 5 & -5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 3 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

3º/ Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$, hallar las matrices X que verifique: $A\cdot X=X\cdot A$.

Llamamos $X=\begin{pmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{pmatrix}$.

Desarrollamos la igualdad $A\cdot X=X\cdot A$:

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}a & b & c\\ -d & -e & -f\\ d & e & f\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & -b+c & 0\\ d & -e+f & 0\\ g & -h+i & 0\end{pmatrix}$$

Igualando coeficientes tenemos:

(1) $a=a$	(4) $-d=d$	(7) $d=g$
(2) $b=-b+c$	(5) $-e=-e+f$	(8) $e=-h+i$
(3) $c=0$	(6) $-f=0$	(9) $f=0$

De estas ecuaciones deducimos: $b=0$, $c=0$, $d=0$, $f=0$, $g=0$, $i=e+h$.

Por lo tanto, las soluciones son de la forma:

$$X=\begin{pmatrix}a & 0 & 0\\ 0 & e & 0\\ 0 & h & e+h\end{pmatrix} \text{ , donde } a, e, h\in\mathbb{R} .$$

4º/ Sean las matrices

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Determine la dimensión de la matriz M para que pueda efectuarse el producto $A{\cdot}M{\cdot}C$.

b) Determine la dimensión de la matriz N para que $C^t \cdot N$ sea una matriz cuadrada.

c) Calcula $A^t \cdot B \cdot C^t$.

a) Dado que A es de dimensión 2×3 y C es de dimensión 3×2 para que pueda efectuarse $A{\cdot}M{\cdot}C$ tendríamos que:

Número de filas de M = Número de columnas de A = 3.
Número de columnas de M = Número de filas de C = 3.

Por tanto, M ha de ser una matriz cuadrada de orden 3.

b) C^t es una matriz de dimensión 2×3, luego para que pueda efectuarse el producto $C^t \cdot N$:

Número de filas de N = Número de columnas de C^t = 3.

El producto $C^t \cdot N$ tendrá 2 filas y sus columnas será el número de columnas de N, por lo que para que el resultado sea una matriz cuadrada, el número de columnas de N ha de ser 2.

En conclusión, N será de dimensión 3×2.

c) $$A^t \cdot B \cdot C^t=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 4 & -8 \\ -4 & 6 & -4 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

5º/ Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, halla A^3 , A^5 y A^n .

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$A^4=A^3\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 4\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$A^5=A^4\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 4\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 5\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

…........

$$A^n=\begin{pmatrix}1 & 0 & n\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

6º/Calcula A^{2000} , siendo $A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 0\\ 2 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 0\\ 2 & 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 0\\ 2 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 0\\ 2 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 8\\ 0 & 8 & 0\\ 8 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$A^4=A^3\cdot A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 8\\ 0 & 8 & 0\\ 8 & 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 0\\ 2 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16 & 0 & 0\\ 0 & 16 & 0\\ 0 & 0 & 16\end{pmatrix}\ \ldots$$

$$A^n=\begin{cases}\begin{pmatrix}0 & 0 & 2^n\\ 0 & 2^n & 0\\ 2^n & 0 & 0\end{pmatrix} & si\ \ n\ \ es\ \ impar\\ \begin{pmatrix}2^n & 0 & 0\\ 0 & 2^n & 0\\ 0 & 0 & 2^n\end{pmatrix} & si\ \ n\ \ es\ \ par\end{cases}\text{, por lo tanto: }\ A^{2000}=\begin{pmatrix}2^{2000} & 0 & 0\\ 0 & 2^{2000} & 0\\ 0 & 0 & 2^{2000}\end{pmatrix}\ .$$

7º/ Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$, halla A^{2004} .

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I$$

$$A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=A$$

$$A^4=A^3\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I\ \ldots$$

$A^n=I$ si n es par , y $A^n=A$ si n es impar, por lo que $A^{2004}=I$.

8º/ Determine los valores *x* e *y* que hacen cierta la siguiente igualdad:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Operando: $\begin{pmatrix} x-y \\ 3x+2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+2x \\ 3y-2 \end{pmatrix}$.

Igualando y resolviendo el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x-y=3+2x \\ 3x+2y=3y-2 \end{array}\right\} \quad \text{Solución:} \quad x=\frac{-5}{4} \quad , \quad y=\frac{-7}{4} \quad .$$

9º/ Calcula el rango de la matriz $A=\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 3 & 6 & 9 \\ -5 & -10 & m \end{pmatrix}$ según los valores del parámetro real *m*.

Aplicamos el método de Gauss, para hacer ceros por debajo de la diagonal:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 3 & 6 & 9 \\ -5 & -10 & m \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & -5 & m+5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 3m+45 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ll} F_2 \to F_2+3F_1 & F_3 \to 3F_3+5F_2 \\ F_3 \to F_3-5F_1 & \end{array}$$

Si $3m+45=0 \Rightarrow m=\frac{-45}{3}=-15$.

Por tanto:

Si $m=-15 \Rightarrow r(A)=2$ (hay 2 filas no nulas).
Si $m \neq -15 \Rightarrow r(A)=3$ (las 3 filas son no nulas).

54021

10º/ Determina dos matrices X e Y tales que:

$$3X-2Y=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 8 & -1\end{pmatrix} \qquad 4X-3Y=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 3 & 0\end{pmatrix}.$$

$$\left.\begin{array}{r} 3X-2Y=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 8 & -1\end{pmatrix}=A \\ 4X-3Y=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 3 & 0\end{pmatrix}=B \end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{r} 3X-2Y=A \\ 4X-3Y=B \end{array}\right\}$$

Eliminamos Y:

$$\left.\begin{array}{r} 3\cdot(3X-2Y=A) \\ -2\cdot(4X-3Y=B) \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 9X-6Y=3A \\ -8X+6Y=-2B \end{array}\right\}$$

$$X=3A-2B$$

$$Y=3A-2B=3\cdot\begin{pmatrix}1 & -2\\ 8 & -1\end{pmatrix}-2\cdot\begin{pmatrix}2 & 4\\ 3 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -14\\ 18 & -3\end{pmatrix}$$

Eliminamos X:

$$\left.\begin{array}{r} 4\cdot(3X-2Y=A) \\ -3\cdot(4X-3Y=B) \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 12X-8Y=4A \\ -12X+9Y=-3B \end{array}\right\}$$

$$Y=4A-3B$$

$$Y=4A-3B=4\cdot\begin{pmatrix}1 & -2\\ 8 & -1\end{pmatrix}-3\cdot\begin{pmatrix}2 & 4\\ 3 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & -20\\ 23 & -4\end{pmatrix}$$