PROBLEMAS SELECTIVIDAD (TODA ESPAÑA)_2019
MATES II

1. Andalucía, junio 19

Ejercicio 3A. [2,5 puntos] Calcula todas las matrices $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tales que $a + d = 1$, tienen determinante 1 y cumplen $AX = XA$, siendo de $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

---

2. Andalucía, septiembre 19

Ejercicio 3B. [2,5 puntos] Calcula en grados los tres ángulos de un triángulo sabiendo que el menor de ellos es la mitad del ángulo mayor y que la suma del ángulo menor y el ángulo mayor es el doble del otro ángulo.

---

3. Aragón, junio 19 opción A

1. a) (2 puntos) Determine el rango de la matriz A siguiente, según los diferentes valores del parámetro k.

$$A = \begin{pmatrix} k & 0 & k \\ 0 & k+2 & 0 \\ 1 & 1 & k+2 \end{pmatrix}$$

b) (1 punto) Determine la inversa de la matriz A anterior cuando $k = 1$.

---

4. Aragón, junio 19, opción B

1.

a) (*1,5 puntos*) El club deportivo Collarada está formado por 60 deportistas de las siguientes disciplinas: esquí alpino, esquí nórdico y escalada. Se sabe que hay 16 deportistas menos de esquí alpino que la suma de los de esquí nórdico y escalada. Además, el número de deportistas de esquí alpino más los de escalada es tres veces el número de deportistas de esquí nórdico. Calcula el número de deportistas de cada disciplina.

b) (*1,5 puntos*) Sabiendo que $a = -2$, calcule el valor del siguiente determinante.

$$\begin{vmatrix} a & a+b & a-c \\ 2a & 3a+2b & 4a-2c \\ 3a & 6a+3b & 10a-3c \end{vmatrix}$$

---

5. Asturias, junio 19, opción A

1. Dado el sistema de ecuaciones $\left.\begin{array}{rcrcrl} mx & + & y & - & z & = 0 \\ 2x & + & my & & & = m \\ x & & & + & mz & = m \end{array}\right\}$ $m \in \mathbb{R}$.

a) Estudia y clasifica el sistema según los valores de m. (1.25 puntos)
b) Resuélvelo, si es posible, para el caso $m = 1$. (0.75 puntos)
c) Para qué valores de m se tiene la solución $x = 0,\ y = 1,\ z = 1$. (0.5 puntos)

---

6. Asturias, julio 19, opción B

1. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} x & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix}$ $x \in \mathbb{R}$

a) Estudia para qué valores de x se cumple $A^3 - I = O$ (I matriz identidad y O matriz nula). (1 punto)
b) Calcula A^{12} para los valores de x que verifican la condición anterior. (0.75 puntos)
c) Para $x = 0$ y sabiendo que ese valor verifica la condición del primer apartado, calcula, si existe, la inversa de A. (0.75 puntos)

---

7. Baleares, junio 19, opción B

1. Considerem la matriu i els vectors següents:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} y \\ 2y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d} = \begin{pmatrix} 6-2y \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Calculau x i y perquè es verifiqui:

$$\mathbf{b} - \mathbf{A}\cdot\mathbf{c} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{d}. \qquad \text{(10 punts)}$$

---

8. Canarias, junio 19, opción B

2. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones matriciales: (2,5 ptos)

$$\left.\begin{array}{l} 2X + 3Y = \begin{pmatrix} 8 & -3 & 4 \\ 7 & -1 & 12 \end{pmatrix} \\[2ex] X - 2Y = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -7 & 3 & -1 \end{pmatrix} \end{array}\right\}$$

---

9. Cantabria, junio 19 (EXAMEN Nº 1)

Ejercicio 1

Considere el sistema $\begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ t & -1 & 1 \\ t & 0 & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ dependiente del parámetro t.

1) [1.5 PUNTOS] Clasifique, en función del valor de t, el tipo de sistema.

2) [1 PUNTO] Calcule todas las soluciones del sistema en el caso $t = 1$.

10. Castilla La Mancha, junio 19, opción B

3B. Dadas matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Calcula razonadamente la matriz inversa de A. **(1 punto)**
b) Calcula razonadamente la matriz X que verifica que $A \cdot X - 2B = C$. **(1,5 puntos)**

11. Castilla–León, julio 19, opción A

E1.- a) Discutir según los valores del parámetro m el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + y + mz = 4 \end{cases}$$ **(1 punto)**

b) Resolverlo para $m = 1$. **(1 punto)**

12. Cataluña, junio 19

2. Considereu el sistema d'equacions lineals següent, que depèn del paràmetre real k:

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = -1 \\ x + k^2 y + 3z = 2k \\ 3x + 7y + 7z = k - 3 \end{cases}$$

a) Discutiu el sistema per als diferents valors del paràmetre k.
[1 punt]

b) Resoleu el sistema per al cas $k = -1$.
[1 punt]

13. Cataluña, junio 19

5. Sigui la matriu $\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}$, en què a és un paràmetre real.

***a*)** Calculeu per a quins valors del paràmetre a se satisfà la igualtat $\boldsymbol{M}^2-\boldsymbol{M}-2\boldsymbol{I}=\boldsymbol{0}$, en què $\boldsymbol{I}$ és la matriu identitat i $\boldsymbol{0}$ és la matriu nul·la, totes dues d'ordre 2.

[1 punt]

***b*)** Fent servir la igualtat de l'apartat anterior, trobeu una expressió general per a calcular la matriu inversa de la matriu $\boldsymbol{M}$ i, a continuació, calculeu la inversa de $\boldsymbol{M}$ per al cas $a=\sqrt{2}$.

[1 punt]

14. Cataluña, septiembre 19

3. Siguin les matrius $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$ i $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

***a*)** Calculeu $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ i $\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}$.

[1 punt]

***b*)** Justifiqueu que si el producte de dues matrius quadrades no nul·les té per resultat la matriu nul·la, aleshores el determinant de totes dues matrius ha de ser zero.

[1 punt]

15. Comunidad Valenciana, junio 19, opción A

Problema A.1. Se dan la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ -2 & a+1 & 2 \\ -3 & a-1 & a \end{pmatrix}$, que depende del parámetro real a, y una matriz cuadrada B de orden 3 tal que $B^2=\frac{1}{3}I-2B$, siendo I la matriz identidad de orden 3.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) El rango de la matriz A en función del parámetro a y el determinante de la matriz $2A^{-1}$ cuando $a=1$. (2+2 *puntos*)

b) Todas las soluciones del sistema de ecuaciones $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ cuando $a=-1$. (3 *puntos*)

c) La comprobación de que B es invertible, encontrando m y n tales que $B^{-1}=mB+nI$. (3 *puntos*)

16. Comunidad Valenciana, junio 19, opción B

Problema B.1. Se da el sistema $\begin{cases} x+y+z=4 \\ 3x+4y+5z=5 \\ 7x+9y+11z=\alpha \end{cases}$, donde α es un parámetro real.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) Los valores de α para los que el sistema es compatible y los valores de α para los que el sistema es incompatible. (4 *puntos*)

b) Todas las soluciones del sistema cuando sea compatible. (4 *puntos*)

c) La discusión de la compatibilidad y determinación del nuevo sistema deducido del anterior al cambiar el coeficiente 11 por cualquier otro número diferente. (2 *puntos*)

17. Extremadura, julio 19, opción B

1. Discuta, en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$, el sistema lineal de ecuaciones: **(2 puntos)**

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & y & - & az & = & 2 \\ x & + & y & & & = & a+1 \\ (a+1)x & + & y & - & z & = & 2 \end{array}$$

18. Galicia, junio 19, opción A

1. Da respuesta a los apartados siguientes:
a) Suponiendo que A y X son matrices cuadradas y que $A+I$ es invertible, despeja X en la ecuación $A-X=A\cdot X$.
b) Si $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, calcula X tal que $A-X=A\cdot X$.

19. La Rioja, julio 19

4.– (3 puntos) Sea a un parámetro real cualquiera. Considera la matriz:

$$A=\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & -a & 2a-1 \end{array}\right),$$

(I) Determina para qué valores del parámetro a existe la inversa de la matriz A.

(II) Halla la inversa de la matriz A, cuando exista.

(III) Para $a=1$ y las matrices

$$B=\left(\begin{array}{cc} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{array}\right), \quad C=\left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \end{array}\right), \quad D=\left(\begin{array}{ccc} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

resuelve el sistema

$$\left\{\begin{array}{ll} BXA & =Y, \\ \frac{1}{3}Y+C & =D. \end{array}\right.$$

20. Madrid, junio 19, opción A

Ejercicio 1 . Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dadas la matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & a & 2 & 2-a \\ -1 & 2 & a & a-2 \end{pmatrix}$ y $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) (1.5 puntos) Estudiar el rango de A en función del parámetro real a.
b) (1 punto) Calcular, si es posible, la inversa de la matriz AM para el caso $a = 0$.

21. Madrid, junio 19, opción B

Ejercicio 1 . Calificación máxima: 2.5 puntos.

Una estudiante pidió en la cafetería 3 bocadillos, 2 refrescos y 2 bolsas de patatas y pagó un total de 19 euros. Al mirar la cuenta comprobó que le habían cobrado un bocadillo y una bolsa de patatas de más. Reclamó y le devolvieron 4 euros.
Para compensar el error, el vendedor le ofreció llevarse un bocadillo y un refresco por solo 3 euros, lo que suponía un descuento del 40 % respecto a sus precios originales. ¿Cuáles eran los respectivos precios sin descuento de un bocadillo, de un refresco y de una bolsa de patatas?

22. Madrid, julio 19, opción A

Ejercicio 1 . Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dado el sistema de ecuaciones $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} kx & + & (k+1)y & + & z & = & 0, \\ -x & + & ky & - & z & = & 0, \\ (k-1)x & - & y & & & = & -(k+1), \end{array}\right.$ se pide:

a) (2 puntos) Discutir el sistema según los valores del parámetro real k.
b) (0.5 puntos) Resolver el sistema para $k = -1$.

23. Madrid, julio 19, opción B

Ejercicio 1 . Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1-a & 1 \\ 1 & 1+a \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) (1 punto) Calcular para qué valores $a \in \mathbb{R}$ se verifica $A^2 - I = 2A$.
b) (0.75 puntos) Calcular los números reales a para los que la matriz A admite inversa y calcularla, cuando sea posible, en función del parámetro a.
c) (0.75 puntos) Calcular, en función de a, el determinante de la matriz $(AA^t)^2$, donde A^t denota la matriz traspuesta de A.

24. Murcia, junio 19, opción B

B.1: Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) **[1 p.]** Calcule las potencias sucesivas A^2, A^3 y A^4.

b) **[0,5 p.]** Calcule la expresión general de A^n para cualquier valor de $n \in \mathbb{N}$.

c) **[1 p.]** Determine si existe la inversa de A. En caso afirmativo, calcúlela.

25. Navarra, junio 19, opción A

A1) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases} (a+2)x - y - az = -a \\ (-a-2)x + 2y + (a^2-a)z = 3a-1 \\ (a+2)x - 2y + (2-2a)z = -2a \end{cases}$$

(3 puntos)

26. Navarra, junio 19, opción B

B1) Resuleve la ecuación matricial $X \cdot A^{35} = A^{25}$ teniendo en cuenta que A es la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(2 puntos)

27. Navarra, julio 19, opción B

B1) Calcula los valores del parámetro t para que se cumpla la condición $|A \cdot B| = |A + B|$, siendo A y B las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & t-1 \\ 0 & -t & t \\ t+1 & 1-t & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ t+1 & t & t+1 \\ 1 & t-1 & t+1 \end{pmatrix}$$

(2 puntos)

28. País Vasco, junio 19

Ejercicio B1

Dada la matriz $A(a)$

$$A(a)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & a & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

calcular, razonadamente, el valor de a para que el determinante de $A(a)^2$ valga 4. (2 puntos)

29. País Vasco, julio 19

Ejercicio B1

Dada una matriz 3×3 cuyo determinante es igual a 5, se realizan sucesivamente las siguientes operaciones:

a) se cambian entre sí la primera y segunda fila,

b) se multiplica la tercera columna por -2,

c) se multiplica toda la matriz por 2 y

d) se traspone la matriz.

Calcular de forma razonada el determinante de la matriz obtenida.