ALGUNOS PROBLEMAS DE ÁLGEBRA PROPUESTOS EN LAS PRUEBAS DE EBAU–EvAU–PEBAU… DE 2019

1. Andalucía, junio 19

Ejercicio 3A. [2,5 puntos] Calcula todas las matrices $X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tales que $a+d=1$, tienen determinante 1 y cumplen $AX=XA$, siendo de $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Solución:

Si $AX=XA \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -c & -d \\ a & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b & -a \\ d & -c \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} -c=b \\ -d=-a \\ a=d \\ b=-c \end{cases} \to \text{si } a=d \text{ y } a+d=1 \Rightarrow 2a=1 \Rightarrow a=\frac{1}{2}=d.$$

Por tanto, $X=\begin{pmatrix} 1/2 & b \\ -b & 1/2 \end{pmatrix}$.

Como $|X|=1 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1/2 & b \\ -b & 1/2 \end{vmatrix}=\frac{1}{4}+b^2=1 \Rightarrow b^2=\frac{3}{4} \Rightarrow b=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Las matrices pueden ser:

$$X=\begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \text{ o } X=\begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

2. Andalucía, septiembre 19

Ejercicio 3B. [2,5 puntos] Calcula en grados los tres ángulos de un triángulo sabiendo que el menor de ellos es la mitad del ángulo mayor y que la suma del ángulo menor y el ángulo mayor es el doble del otro ángulo.

Solución:

Sean *x*, *y*, *z* los valores de los ángulos del triángulo.

Si *x* es el menor y *z* el mayor, se cumple:

$$x=\frac{z}{2} \Rightarrow 2x-z=0;\ x+z=2y \Rightarrow x-2y+z=0;\ x+y+z=180.$$

Se tiene el sistema: $\begin{cases} 2x \quad -z=0 \\ x-2y+z=0 \\ x+y+z=180 \end{cases}$. Aplicando transformaciones de Gauss:

$$\begin{cases} 2x \quad -z=0 \\ x-2y+z=0 \\ x+y+z=180 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \\ E2+E1 \\ E3+E1 \end{matrix}\begin{cases} 2x \quad -z=0 \\ 3x-2y=0 \\ 3x+y=180 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ E3-E2 \end{matrix}\begin{cases} 2x \quad -z=0 \\ 3x-2y=0 \\ 3y=180 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x \quad -z=0 \qquad \to z=80 \\ 3x-2y=0 \to 3x-120=0 \to x=40 \\ \qquad y=60 \quad \uparrow \end{cases}$$

Los ángulos miden 40º, 60º y 80º.

3. Aragón, junio 19 opción A

1. a) (2 puntos) Determine el rango de la matriz *A* siguiente, según los diferentes valores del parámetro *k*.

$$A=\begin{pmatrix} k & 0 & k \\ 0 & k+2 & 0 \\ 1 & 1 & k+2 \end{pmatrix}$$

b) (1 punto) Determine la inversa de la matriz *A* anterior cuando *k* = 1.

Solución:

a) El rango de una matriz es el orden del mayor menor no nulo.

Como,

$$|A|=\begin{vmatrix} k & 0 & k \\ 0 & k+2 & 0 \\ 1 & 1 & k+2 \end{vmatrix}=(k+2)\cdot\left[k\cdot(k+2)-k\right]=(k+2)\cdot\left[k\cdot(k+1)\right]$$

→ vale 0 cuando *k* = –2, –1, 0.

Por tanto, si $k \neq -2, -1, 0$ el rango de la matriz *A* será 3.

Para *k* = –2, $A=\begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ → su rango es 2, pues el menor $\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-2\neq 0$.

Para *k* = –1, $A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ → su rango es 2, pues el menor $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-1\neq 0$.

Para *k* = 0, $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ → su rango es 2, pues el menor $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=4\neq 0$.

b) Para *k* = 1, $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ → tiene inversa, pues $|A|=3\cdot 2=6\neq 0$.

Su inversa es $A^{-1}=\dfrac{\left(Adj(A)\right)^t}{|A|}$.

$$Adj(A)=\begin{pmatrix} 9 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & -1 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{6}\cdot\begin{pmatrix} 9 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Comprobación: (debe cumplirse que $A\cdot A^{-1}=I$)

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{6}\cdot\begin{pmatrix} 9 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & -1 & 3 \end{pmatrix}=\frac{1}{6}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 9 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & -1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A\cdot A^{-1}=\frac{1}{6}\cdot\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=I.$$

4. Aragón, junio 19, opción B

1.

a) (*1,5 puntos*) El club deportivo Collarada está formado por 60 deportistas de las siguientes disciplinas: esquí alpino, esquí nórdico y escalada. Se sabe que hay 16 deportistas menos de esquí alpino que la suma de los de esquí nórdico y escalada. Además, el número de deportistas de esquí alpino más los de escalada es tres veces el número de deportistas de esquí nórdico. Calcula el número de deportistas de cada disciplina.

b) (*1,5 puntos*) Sabiendo que $a=-2$, calcule el valor del siguiente determinante.

$$\begin{vmatrix} a & a+b & a-c \\ 2a & 3a+2b & 4a-2c \\ 3a & 6a+3b & 10a-3c \end{vmatrix}$$

Solución:

a) Sean *x*, *y* y *z* el número de deportistas de esquí alpino, esquí nórdico y escalada, respectivamente. Entonces, con los datos del enunciado, debe cumplirse:

$x+y+z=60$ → hay 60 deportistas en total;

$x=y+z-16$ → hay 16 deportistas menos de esquí alpino que la suma de los otros dos;

$x+z=3y$ → esquiadores de alpino más escalada son el tripe que esquí nórdico.

Se obtiene el sistema:

$$\begin{cases} x+y+z=60 \\ x-y-z=-16 \\ x-3y+z=0 \end{cases} \to \text{(Por Gauss)} \begin{matrix} \\ E2+E1 \\ E3-E1 \end{matrix} \begin{cases} x+y+z=60 \\ x-y-z=-16 \\ x-3y+z=0 \end{cases} \to \begin{cases} x+y+z=60 \\ 2x=44 \\ -4y=-60 \end{cases} \to \begin{cases} x=22 \\ y=15 \\ z=23 \end{cases}.$$

b) Haciendo transformaciones de Gauss:

$$\begin{vmatrix} a & a+b & a-c \\ 2a & 3a+2b & 4a-2c \\ 3a & 6a+3b & 10a-3c \end{vmatrix} = \begin{matrix} \\ F2-2F1 \\ F3-3F1 \end{matrix} \begin{vmatrix} a & a+b & a-c \\ 0 & a & 2a \\ 0 & 3a & 7a \end{vmatrix} = a\cdot\left(7a^2-6a^2\right)=a^3.$$

Por tanto, si $a=-2$, el determinante valdrá $(-2)^3=-8$.

5. Asturias, junio 19, opción A

1. Dado el sistema de ecuaciones $\left.\begin{array}{rcrcrl} mx & + & y & - & z & =0 \\ 2x & + & my & & & =m \\ x & & & + & mz & =m \end{array}\right\}$ $m\in\mathbb{R}$.

a) Estudia y clasifica el sistema según los valores de m. (1.25 puntos)

b) Resuélvelo, si es posible, para el caso $m=1$. (0.75 puntos)

c) Para qué valores de m se tiene la solución $x=0,\ y=1,\ z=1$. (0.5 puntos)

Solución:

a) Sea *A* la matriz de coeficientes *y M* la matriz ampliada.

$$A=\left(\begin{array}{ccc|c} m & 1 & -1 & 0 \\ 2 & m & 0 & m \\ 1 & 0 & m & m \end{array}\right)=M$$

Si r(*A*) = r(*M*) = 3 → sistema compatible determinado: solución única.

Si r(*A*) = r(*M*) < 3 → sistema compatible indeterminado: infinitas soluciones.

Si r(*A*) < r(*M*) → sistema incompatible: no tiene solución.

El determinante de *A* vale

$$|A| = \begin{vmatrix} m & 1 & -1 \\ 2 & m & 0 \\ 1 & 0 & m \end{vmatrix} = m^3 - m = m\left(m^2 - 1\right)$$ → Este determinante vale 0 si $m = 0$ o $m = \pm 1$.

Con esto:

- Si $m \neq 0$ y $\pm 1 \Rightarrow$ r(A) = 3 = r(M). El sistema será compatible determinado.
- Si $m = 0$ se tendrá: $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = M$ → Resulta un sistema homogéneo: compatible

indeterminado, pues r(A) = 2.

- Si $m = 1$, $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) = M$ → Como la columna de términos independientes es la

suma de $C2 + C3 \Rightarrow$ r(A) = r(M) =2: sistema compatible indeterminado.

- Si $m = -1$, $A = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right) = M$ → Como $C4 = C2 + C3 \Rightarrow$ r(A) = r(M) =2: sistema

compatible indeterminado.

b) Si $m = 1$, el sistema inicial es:

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + y = 1 \\ x + z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 1 \\ x + z = 1 \end{cases} \Rightarrow (x = t) \to \begin{cases} x = t \\ y = 1 - 2t \\ z = 1 - t \end{cases}.$$

c) Si en el sistema inicial se sustituye la solución $x = 0$, $y = 1$, $z = 1$ en las ecuaciones, se obtiene:

$$\begin{cases} m \cdot 0 + 1 - 1 = 0 \\ 2 \cdot 0 + m \cdot 1 = m \\ 0 + m \cdot 1 = m \end{cases}$$ → que es cierto para cualquier valor de m.

Por tanto, la solución $x = 0$, $y = 1$, $z = 1$ es válida siempre; no depende del valor de m.

<u>**6**. Asturias, julio 19, opción B</u>

1. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} x & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix}$ $\quad x \in \mathbb{R}$

a) Estudia para qué valores de x se cumple $A^3 - I = O$ (I matriz identidad y O matriz nula). (1 punto)

b) Calcula A^{12} para los valores de x que verifican la condición anterior. (0.75 puntos)

c) Para $x = 0$ y sabiendo que ese valor verifica la condición del primer apartado, calcula, si existe, la inversa de A. (0.75 puntos)

<u>Solución</u>:

a) $$A^2 = \begin{pmatrix} x & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 & -1 & -2x \\ -x & 0 & 1 \\ -1 & x & x^2 \end{pmatrix}.$$

$$A^3=\begin{pmatrix} x & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x^2 & -1 & -2x \\ -x & 0 & 1 \\ -1 & x & x^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x^3+1 & -2x & -3x^2 \\ -x^2 & 1 & 2x \\ -2x & x^2 & 1+x^3 \end{pmatrix}.$$

Si se desea que $A^3-I=O \Rightarrow A^3=I \Rightarrow \begin{pmatrix} x^3+1 & -2x & -3x^2 \\ -x^2 & 1 & 2x \\ -2x & x^2 & 1+x^3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow x=0.$

b) Para $x = 0$,

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};\ A^2=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix};\ A^3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=I \Rightarrow A^6=A^9=A^{12}=I.$$

c) Para $x = 0$, $|A|=\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}=1\neq 0 \Rightarrow$ Existe la inversa de A.

Como $A^3=A\cdot A^2=I \Rightarrow A^{-1}=A^2 \Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

7. Baleares, junio 19, opción B

1. Considerem la matriu i els vectors següents:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & y \end{pmatrix},\quad \mathbf{b}=\begin{pmatrix} 2 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix},\quad \mathbf{c}=\begin{pmatrix} y \\ 2y \end{pmatrix},\quad \mathbf{d}=\begin{pmatrix} 6-2y \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Calculau x i y perquè es verifiqui:

$$\mathbf{b}-\mathbf{A}\cdot\mathbf{c}=\mathbf{A}\cdot\mathbf{d}.$$ (10 punts)

Solución:

La ecuación matricial dada es:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3/2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & y \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} y \\ 2y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & y \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 6-2y \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 3/2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} xy+2y^2 \\ 2y^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6x-2yx-2y \\ -2y \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 3/2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6x-2yx-2y \\ -2y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} xy+2y^2 \\ 2y^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 3/2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6x-yx-2y+2y^2 \\ -2y+2y^2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 6x-yx-2y+2y^2=2 \\ -2y+2y^2=\dfrac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x-yx-2y+2y^2=2 \\ 4y^2-4y-3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x-2yx-y+2y^2=2 \\ y=-\dfrac{1}{2};\ y=\dfrac{3}{2} \end{cases}.$$

Para $y=-\frac{1}{2}$, la primera ecuación queda $6x+\frac{x}{2}+1+\frac{1}{2}=2 \Rightarrow \frac{13x}{2}=\frac{1}{2} \Rightarrow x=\frac{1}{13}$.

Para $y=\frac{3}{2}$, la primera ecuación queda $6x-\frac{3}{2}x-3+\frac{9}{2}=2 \Rightarrow \frac{9x}{2}=\frac{1}{2} \Rightarrow x=\frac{1}{9}$.

8. Canarias, junio 19, opción B

2. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones matriciales: (2,5 ptos)

$$\left.\begin{array}{l} 2X+3Y=\begin{pmatrix} 8 & -3 & 4 \\ 7 & -1 & 12 \end{pmatrix} \\ X-2Y=\begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -7 & 3 & -1 \end{pmatrix} \end{array}\right\}$$

Solución:
Se trata de un sistema (matricial) de carácter lineal. Puede resolverse aplicando el método de reducción.

$$\begin{cases} 2X+3Y=\begin{pmatrix} 8 & -3 & 4 \\ 7 & -1 & 12 \end{pmatrix} \\ X-2Y=\begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -7 & 3 & -1 \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} E1-2E2 \end{matrix} \begin{cases} 7Y=\begin{pmatrix} 8 & -3 & 4 \\ 7 & -1 & 12 \end{pmatrix}-2\cdot\begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -7 & 3 & -1 \end{pmatrix} \\ X-2Y=\begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -7 & 3 & -1 \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7Y=\begin{pmatrix} 14 & -7 & 0 \\ 21 & -7 & 14 \end{pmatrix} \Rightarrow Y=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Sustituyendo en la segunda ecuación:

$$X-2Y=\begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -7 & 3 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow X-2\cdot\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -7 & 3 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X=\begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -7 & 3 & -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 6 & -2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow X=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

9. Cantabria, junio 19 (EXAMEN Nº 1)

Ejercicio 1

Considere el sistema $\begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ t & -1 & 1 \\ t & 0 & t \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ dependiente del parámetro t.

1) [1.5 PUNTOS] Clasifique, en función del valor de t, el tipo de sistema.

2) [1 PUNTO] Calcule todas las soluciones del sistema en el caso $t=1$.

Solución:
1) Se trata de un sistema homogéneo: la matriz de términos independientes en nula. Por tanto, siempre es compatible, para cualquier valor de t.
Para ver si es determinado o indeterminado hay que hallar el rango de la matriz de coeficientes.

$$|A|=\begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ t & -1 & 1 \\ t & 0 & t \end{vmatrix}=2t-2t^2=2t(1-t) \to |A|=0 \text{ si } t=0 \text{ o } t=1.$$

Luego:
- Si $t\neq 0$ y $t\neq 1$, como el rango de A es 3, el sistema será compatible determinado: su única solución es $x=y=z=0$.
- En los casos $t=0$ o $t=1$, como el rango de A vale 2, el sistema será compatible indeterminado.

2) Si $t = 1$, el sistema es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \\ x-y+z=0 \\ x+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \\ x+z=0 \end{cases}.$$

Restando ambas ecuaciones y haciendo $x = \lambda$ se obtienen sus soluciones: $\begin{cases} x=\lambda \\ y=0 \\ z=-\lambda \end{cases}$.

<u>**10**. Castilla La Mancha, junio 19, opción B</u>

3B. Dadas matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Calcula razonadamente la matriz inversa de A. **(1 punto)**

b) Calcula razonadamente la matriz X que verifica que $A \cdot X - 2B = C$. **(1,5 puntos)**

<u>Solución</u>:

a) Una matriz es invertible si su determinante no vale 0.

Como $|A| = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1$, la matriz es invertible. Su inversa es $A^{-1} = \dfrac{(Adj(A))^t}{|A|}$.

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Comprobación: (debe cumplirse que $A \cdot A^{-1} = I$)

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Si $A \cdot X - 2B = C \Rightarrow A \cdot X = C + 2B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot (C + 2B)$.

Esto es,

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \right] \Rightarrow$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 8 \\ 4 & 5 & 10 \\ -9 & -12 & -23 \end{pmatrix}.$$

11. Castilla–León, julio 19, opción A

E1.- a) Discutir según los valores del parámetro m el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+y+mz=4 \end{cases}$$ **(1 punto)**

b) Resolverlo para $m=1$. **(1 punto)**

Solución:

a) Se trata de un sistema de 2 ecuaciones con 3 incógnitas. Por tanto, nunca podrá ser compatible determinado: el rango de la matriz de coeficientes es menor que el número de incógnitas.

Se tienen las matrices *A* y *M*, de coeficientes y ampliada, siguientes:

$$A=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & m & 4 \end{array}\right)=M \to \text{ambas son de rango 2.}$$

Por tanto, el sistema es compatible indeterminado para cualquier valor de *m*: tendrá infinitas soluciones en cada caso.

b) Para $m=1$, el sistema es: $\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+y+z=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y-z=1-x \\ y+z=4-2x \end{cases}$.

Sumando y restando ambas ecuaciones se obtiene: $\begin{matrix} E1+E2 \\ E2-E1 \end{matrix}\begin{cases} 2y=5-3x \\ 2z=3-x \end{cases}$.

Si se despeja y se hace $x=\lambda$, se tiene: $\begin{cases} x=\lambda \\ y=\dfrac{5}{2}-\dfrac{3}{2}\lambda \\ z=\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}\lambda \end{cases}$.

12. Cataluña, junio 19

2. Considereu el sistema d'equacions lineals següent, que depèn del paràmetre real k:

$$\begin{cases} x+3y+2z=-1 \\ x+k^2y+3z=2k \\ 3x+7y+7z=k-3 \end{cases}$$

a) Discutiu el sistema per als diferents valors del paràmetre k.
[1 punt]

b) Resoleu el sistema per al cas $k=-1$.
[1 punt]

Solución:

a) Sea A la matriz de coeficientes y M la matriz ampliada,

$$A=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & k^2 & 3 & 2k \\ 3 & 7 & 7 & k-3 \end{array}\right)=M$$

Si r(A) = r(M) = 3 → sistema compatible determinado: solución única.
Si r(A) = r(M) < 3 → sistema compatible indeterminado: infinitas soluciones.
Si r(A) < r(M) → sistema incompatible: no tiene solución.

El determinante de A vale,

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & k^2 & 3 \\ 3 & 7 & 7 \end{vmatrix}=7k^2-21+6+14-6k^2=k^2-1 \to \text{se anula si } k=\pm 1.$$

Con esto:

- Si $k\neq -1$ y 1, r(A) = r(M) = 3 → sistema compatible determinado.
- Si $k=-1$,

$$A=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & -2 \\ 3 & 7 & 7 & -4 \end{array}\right)=M \to \text{puede observarse, en } M,\ F3=2F1+F2 \Rightarrow \text{r}(A)=\text{r}(M)=2.$$

En este caso, el sistema es compatible indeterminado.

- Si $k=1$,

$$A=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 7 & 7 & -2 \end{array}\right)=M \to \text{como el menor } |M_1|=\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 7 & 2 \\ 7 & 7 & -2 \end{vmatrix}=-24\neq 0 \Rightarrow$$

⇒ r(A) = 2, r(M) =3. En este caso, el sistema es incompatible.

b) Si $k=-1$, el sistema es compatible indeterminado. Se resuelve como sigue.

$$\begin{cases} x+3y+2z=-1 \\ x+y+3z=-2 \\ 3x+7y+7z=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3y+2z=-1 \\ x+y+3z=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3y=-1-2z \\ x+y=-2-3z \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} E1-E2 \\ \end{matrix}\begin{cases} 2y=1+z \\ x+y=-2-3z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=-1+2y \\ x=-2-y-3z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=-1+2y \\ x=-2-y-3(-1+2y) \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \begin{cases} z=-1+2y \\ x=1-7y \end{cases}$. Haciendo $y=t \Rightarrow \begin{cases} x=1-7t \\ y=\quad t \\ z=-1+2t \end{cases}$.

13. Cataluña, junio 19

5. Sigui la matriu $\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}$, en què a és un paràmetre real.

a) Calculeu per a quins valors del paràmetre a se satisfà la igualtat $\boldsymbol{M}^2-\boldsymbol{M}-2\boldsymbol{I}=\boldsymbol{0}$, en què $\boldsymbol{I}$ és la matriu identitat i $\boldsymbol{0}$ és la matriu nulla, totes dues d'ordre 2.
[1 punt]

b) Fent servir la igualtat de l'apartat anterior, trobeu una expressió general per a calcular la matriu inversa de la matriu $\boldsymbol{M}$ i, a continuació, calculeu la inversa de $\boldsymbol{M}$ per al cas $a=\sqrt{2}$.
[1 punt]

Solución:

a) $M^2-M-2I=O \Rightarrow M^2-M=2I$.
Operando se tiene:

$$M^2=\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+a^2 & a \\ a & a^2 \end{pmatrix};\ M^2-M=\begin{pmatrix} 1+a^2 & a \\ a & a^2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}.$$

Luego, si:

$$M^2-M=2I \Rightarrow \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow a=\pm\sqrt{2}.$$

b) Si $M^2-M-2I=O \Rightarrow M^2-M=2I \Rightarrow M\cdot(M-I)=2I \Rightarrow M\cdot\frac{1}{2}(M-I)=I$.

Por tanto, $M^{-1}=\frac{1}{2}(M-I)$.

Para el caso $a=\sqrt{2}$, se tendrá:

$$M^{-1}=\frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1 \end{pmatrix}.$$

14. Cataluña, septiembre 19

3. Siguin les matrius $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$ i $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Calculeu $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ i $\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}$.
[1 punt]

b) Justifiqueu que si el producte de dues matrius quadrades no nul·les té per resultat la matriu nul·la, aleshores el determinant de totes dues matrius ha de ser zero.
[1 punt]

Solución:

a) $A\cdot B=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $B\cdot A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}$.

b) Se sabe que, para dos matrices cuadradas del mismo orden, se cumple que $|A\cdot B|=|A|\cdot|B|$.
Si $A\cdot B=O$, donde O es la matriz nula, entonces $|A\cdot B|=0$. Esto exige que, al menos una de las matrices tenga determinante 0.

Supongamos que sea B; para ello, las filas de B deben ser proporcionales: $B=\begin{pmatrix} a & b \\ ka & kb \end{pmatrix}$; como no puede ser nula, entonces o $a\neq 0$ o $b\neq 0$. (Partimos de lo primero, que $a\neq 0$).

Sea ahora la matriz $A=\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, que supondremos no nula y con determinante distinto de 0.

Si se multiplican:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ ka & kb \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a(x+ky) & b(x+ky) \\ a(z+kt) & b(z+kt) \end{pmatrix} \to \text{Si } A\cdot B=O\text{, entonces:}$$

$$\begin{pmatrix} a(x+ky) & b(x+ky) \\ a(z+kt) & b(z+kt) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases} a(x+ky)=0\to a\neq 0\Rightarrow x+ky=0\Rightarrow x=-ky \\ a(z+kt)=0\to a\neq 0\Rightarrow z+kt=0\Rightarrow z=-kt \end{cases}.$$

Con lo que se concluye que $A=\begin{pmatrix} -ky & y \\ -kt & t \end{pmatrix}$, cuyo $|A|=0$.

$\to$ En definitiva, si el producto de dos matrices cuadradas no nulas tiene por resultado la matriz nula, entonces el determinante de cada una de las matrices vale 0.

Otra demostración:

Si la matriz A tiene determinante distinto de 0 $\Rightarrow$ que existe su inversa, A^{-1}.
Por tanto, si se parte de que $A\cdot B=O$ con $B\neq O$, multiplicando por A^{-1} (por la izquierda), se tiene que $A^{-1}\cdot A\cdot B=A^{-1}\cdot O\Rightarrow B=O$, que contradice la hipótesis inicial. En consecuencia, ambas matrices deben tener determinante 0.

15. Comunidad Valenciana, junio 19, opción A

Problema A.1. Se dan la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ -2 & a+1 & 2 \\ -3 & a-1 & a \end{pmatrix}$, que depende del parámetro real a, y una matriz cuadrada B de orden 3 tal que $B^2 = \frac{1}{3} I - 2B$, siendo I la matriz identidad de orden 3.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) El rango de la matriz A en función del parámetro a y el determinante de la matriz $2A^{-1}$ cuando $a = 1$. (2+2 *puntos*)

b) Todas las soluciones del sistema de ecuaciones $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ cuando $a = -1$. (3 *puntos*)

c) La comprobación de que B es invertible, encontrando m y n tales que $B^{-1} = mB + nI$. (3 *puntos*)

Solución:

a) El determinante de A vale

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ -2 & a+1 & 2 \\ -3 & a-1 & a \end{vmatrix} = a^2 + a - 2a + 2 + a(-2a + 2 + 3a + 3) = 2a^2 + 4a + 2 = 2(a+1)^2.$$

Este determinante vale 0 si $a = -1$.

Con esto:

- Si $a \neq -1 \Rightarrow$ r(A) = 3: las tres filas (o columnas) son linealmente independientes.
- Si $a = -1$, la matriz es: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \to$ El rango de A es 2: $|A_{11}| = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$.

$\to$ Si $a = 1 \Rightarrow |A| = 2(1+1)^2 = 8$.

Utilizando las propiedades del cálculo de determinantes: $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$ y $|kA| = k^n |A|$, siendo A y B cuadradas del mismo orden n.

Como $1 = |I| = |A \cdot A^{-1}| = |A| \cdot |A^{-1}| = 8 \cdot |A^{-1}| \Rightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{8}$.

Como $|2A^{-1}| = 2^3 |A^{-1}| \Rightarrow |2A^{-1}| = 2^3 \cdot \frac{1}{8} = 1$.

b) Si $a = -1$, $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x - z = -1 \\ -2x + 2z = 2 \\ -3x - 2y - z = 0 \end{cases} \to$ Este sistema es compatible indeterminado: tiene dos ecuaciones repetidas. Es equivalente a:

$$\begin{cases} x - z = -1 \\ -3x - 2y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 + z \\ -3x - 2y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 + z \\ -3z + 3 - 2y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -1 + z \\ y = 3/2 - 2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 3/2 - 2t \\ z = t \end{cases}.$$

c) Si $B^2 = \frac{1}{3} I - 2B \Rightarrow 3(B^2 - 2B) = I \Rightarrow B(3B - 6I) = I \Rightarrow$ las matrices B y $3B - 6I$ son inversas, siendo $B^{-1} = 3B - 6I$.

Luego los valores de m y n pedidos son: $m = 3$; $n = -6$.

16. Comunidad Valenciana, junio 19, opción B

Problema B.1. Se da el sistema $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 3x + 4y + 5z = 5 \\ 7x + 9y + 11z = \alpha \end{cases}$, donde α es un parámetro real.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) Los valores de α para los que el sistema es compatible y los valores de α para los que el sistema es incompatible. (4 *puntos*)

b) Todas las soluciones del sistema cuando sea compatible. (4 *puntos*)

c) La discusión de la compatibilidad y determinación del nuevo sistema deducido del anterior al cambiar el coeficiente 11 por cualquier otro número diferente. (2 *puntos*)

Solución:

a) Sea *A* la matriz de coeficientes *y M* la matriz ampliada.

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 5 \\ 7 & 9 & 11 & \alpha \end{array}\right) = M$$

Si r(*A*) = r(*M*) = 3 $\to$ sistema compatible determinado: solución única.

Si r(*A*) = r(*M*) < 3 $\to$ sistema compatible indeterminado: infinitas soluciones.

Si r(*A*) < r(*M*) $\to$ sistema incompatible: no tiene solución

El determinante de *A* vale: $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 7 & 9 & 11 \end{vmatrix} = -1 + 2 - 1 = 0 \Rightarrow$ El rango de *A* es 2.

Tomamos otro menor de *M*:

$$|M_1| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 7 & 9 & \alpha \end{vmatrix} = 4\alpha - 45 - 3\alpha + 35 - 4 = \alpha - 14 \to \text{Si } \alpha \neq 14 \text{ el rango de } M \text{ es 3.}$$

Por tanto:

- Si $\alpha \neq 14$, el sistema es incompatible: r(*A*) = 2 < r(*M*) = 3.
- Si $\alpha = 14$, el sistema es compatible indeterminado: r(*A*) = r(*M*) = 2.

b) El sistema es compatible (indeterminado) solo cuando $\alpha = 14$. En ese caso el sistema es:

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 3x + 4y + 5z = 5 \\ 7x + 9y + 11z = 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 4 \\ 3x + 4y + 5z = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 4 - z \\ 3x + 4y = 5 - 5z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 11 + t \\ y = -7 - 2t \\ z = t \end{cases}.$$

c) Si el coeficiente 11 se cambia por *m*, el sistema es: $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 3x + 4y + 5z = 5 \\ 7x + 9y + mz = 14 \end{cases}$.

En este caso, el determinante de la matriz de coeficientes es:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 7 & 9 & m \end{vmatrix} = 4m - 45 - 3m + 35 - 1 = m - 11.$$

Ese determinante siempre es distinto de 0 (pues $m \neq 11$). Por tanto, el sistema siempre será compatible determinado.

17. Extremadura, julio 19, opción B

1. Discuta, en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$, el sistema lineal de ecuaciones: **(2 puntos)**

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & y & - & az & = & 2 \\ x & + & y & & & = & a+1 \\ (a+1)x & + & y & - & z & = & 2 \end{array}$$

Solución:

a) Sea A la matriz de coeficientes *y* M la matriz ampliada.

$$A=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -a & 2 \\ 1 & 1 & 0 & a+1 \\ a+1 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right)=M$$

Si r(A) = r(M) = 3 $\to$ sistema compatible determinado: solución única.
Si r(A) = r(M) < 3 $\to$ sistema compatible indeterminado: infinitas soluciones.
Si r(A) < r(M) $\to$ sistema incompatible: no tiene solución

El determinante de A vale: $|A|=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -a \\ 1 & 1 & 0 \\ a+1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=-2+1-a\cdot(-a)=a^2-1$ $\to$ se anula si $a = \pm 1$.

Por tanto:

- Si $a \neq -1$ y 1, como $|A| \neq 0$, el sistema será compatible determinado: r(A) = r(M) = 3.
- Si $a=-1$, $A=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right)=M$.

El rango de A es 2, pues $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=1\neq 0$; el rango de M es 3, pues $|M_1|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}=-4\neq 0$.

En consecuencia, el sistema es incompatible.

- Si a = 1, $A=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right)=M$ $\to$ hay dos filas repetidas $\Rightarrow$ r(A) = r(M) = 2.

El sistema será compatible indeterminado.

18. Galicia, junio 19, opción A

1. Da respuesta a los apartados siguientes:

a) Suponiendo que A y X son matrices cuadradas y que $A+I$ es invertible, despeja X en la ecuación $A-X=A\cdot X$.

b) Si $A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$, calcula X tal que $A-X=A\cdot X$.

Solución:

a) $A-X=A\cdot X \Rightarrow A=A\cdot X+X \Rightarrow A=(A+I)\cdot X \Rightarrow (A+I)^{-1}\cdot A=(A+I)^{-1}\cdot(A+I)\cdot X \Rightarrow$

$\Rightarrow (A+I)^{-1}\cdot A=X$.

b) $A+I=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 4\end{pmatrix}$.

La inversa de la matriz M es $M^{-1}=\dfrac{(Adj(M))^t}{|M|}$.

En este caso:

$$|A+I|=4+1=5;\ Adj(A+I)=\begin{pmatrix}4 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow (A+I)^{-1}=\frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix}4 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4/5 & 1/5\\ -1/5 & 1/5\end{pmatrix}.$$

Por tanto,

$$X=\begin{pmatrix}4/5 & 1/5\\ -1/5 & 1/5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/5 & -1/5\\ 1/5 & 4/5\end{pmatrix}.$$

19. La Rioja, julio 19

4.– (3 puntos) Sea a un parámetro real cualquiera. Considera la matriz:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & a & 0\\ 0 & -a & 2a-1\end{pmatrix},$$

(I) Determina para qué valores del parámetro a existe la inversa de la matriz A.

(II) Halla la inversa de la matriz A, cuando exista.

(III) Para $a=1$ y las matrices

$$B=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 5 & 2\end{pmatrix},\qquad C=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 2 & -3\end{pmatrix},\qquad D=\begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

resuelve el sistema

$$\begin{cases} BXA & =Y,\\ \frac{1}{3}Y+C & =D.\end{cases}$$

Solución:

I) Una matriz es invertible si su determinante no vale 0.

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & a & 0\\ 0 & -a & 2a-1\end{vmatrix}=a\cdot(2a-1)\to |A|\neq 0 \text{ si } a\neq 0 \text{ y } a\neq \frac{1}{2}\text{: existe la matriz inversa de } A.$$

II) Su inversa es $A^{-1}=\dfrac{(Adj(A))^t}{|A|}$.

$$Adj(A)=\begin{pmatrix}a\cdot(2a-1) & 0 & 0\\ 0 & 2a-1 & a\\ 0 & 0 & a\end{pmatrix}\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{a\cdot(2a-1)}\cdot\begin{pmatrix}a\cdot(2a-1) & 0 & 0\\ 0 & 2a-1 & 0\\ 0 & a & a\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1/a & 0\\ 0 & 1/(2a-1) & 1/(2a-1)\end{pmatrix}.$$

Comprobación: (debe cumplirse que $A\cdot A^{-1}=I$)

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & a & 0\\ 0 & -a & 2a-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1/a & 0\\ 0 & 1/(2a-1) & 1/(2a-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

III) Para a = 1, $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$, $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 5 & 2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 2 & -3\end{pmatrix}$ y

$D=\begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, el sistema $\begin{cases}BXA=Y\\ \frac{1}{3}Y+C=D\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}X=B^{-1}YA^{-1}\\ Y=3D-3C\end{cases}$.

Luego:

$$Y=3\cdot\begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}-3\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 2 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & -3 & -3\\ 3 & -6 & 9\end{pmatrix};\ B^{-1}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -5 & 3\end{pmatrix};$$

$$X=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -5 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6 & -3 & -3\\ 3 & -6 & 9\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$X=\begin{pmatrix}9 & 0 & -15\\ -21 & -3 & 42\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9 & -15 & -15\\ -21 & 39 & 42\end{pmatrix}.$$

20. Madrid, junio 19, opción A

Ejercicio 1. **Calificación máxima:** 2.5 puntos.

Dadas la matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & a & 2 & 2-a \\ -1 & 2 & a & a-2 \end{pmatrix}$ y $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) (1.5 puntos) Estudiar el rango de A en función del parámetro real a.

b) (1 punto) Calcular, si es posible, la inversa de la matriz AM para el caso $a = 0$.

Solución:

a) El rango de una matriz es el orden del mayor menor no nulo.
Se calculan dos de sus menores:

$$|M_1| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & a & 2 \\ -1 & 2 & a \end{vmatrix} = a^2 + a - 2 \rightarrow \text{Se anula cuando } a = -2 \text{ o } a = 1.$$

$$|M_2| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & a & 2-a \\ -1 & 2 & a-2 \end{vmatrix} = a^2 + a - 2 \rightarrow \text{Se anula también si } a = -2 \text{ o } a = 1.$$

Por tanto:

- Si $a \neq -2$ y 1, el rango de A es 3.
- Si $a = -2$ o $a = 1$, el rango es 2: el menor $|M_3| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$.

b) Si $a = 0$, la matriz $A{\cdot}M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

Como $|A{\cdot}M| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -4 + 2 = -2 \neq 0 \Rightarrow$ dicha matriz es invertible.

Su inversa es: $(AM)^{-1} = \dfrac{(Adj(AM))^t}{|AM|}$, siendo $Adj(AM)$ la matriz de los adjuntos de AM.

Como $Adj(AM) = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 2 \\ 8 & -1 & -5 \\ 6 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ y $|A{\cdot}M| = -2 \Rightarrow (AM)^{-1} = -\dfrac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 8 & 6 \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & -5 & -3 \end{pmatrix}$.

21. Madrid, junio 19, opción B

Ejercicio 1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Una estudiante pidió en la cafetería 3 bocadillos, 2 refrescos y 2 bolsas de patatas y pagó un total de 19 euros. Al mirar la cuenta comprobó que le habían cobrado un bocadillo y una bolsa de patatas de más. Reclamó y le devolvieron 4 euros.
Para compensar el error, el vendedor le ofreció llevarse un bocadillo y un refresco por solo 3 euros, lo que suponía un descuento del 40 % respecto a sus precios originales. ¿Cuáles eran los respectivos precios sin descuento de un bocadillo, de un refresco y de una bolsa de patatas?

Solución:

a) Sean *x*, *y*, *z* los precios de cada bocadillo, refresco y bolsa de patatas compradas, respectivamente. Con los datos del enunciado se obtiene:

$3x+2y+2z=15 \to$ Le cobran 19 €, pero le dolvieron 4 €.

$x+z=4 \to$ un bocadillo y una bolsa de patatas valen 4 €; los que le devuelven.

$0,60x+0,60y=3 \to$ la rebaja del 40 % supone un 60 % de su precio.

Se obtiene el sistema $\begin{cases} 3x+2y+2z=15 \\ x+z=4 \\ x+y=5 \end{cases}$.

Puede hacerse por sustitución:

$$\begin{cases} 3x+2y+2z=15 \\ x+z=4 \\ x+y=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x+2y+2z=15 \\ z=4-x \\ y=5-x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x+2(5-x)+2(4-x)=15 \\ z=4-x \\ y=5-x \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x=-3 \to x=3 \\ z=4-x \to z=1 \\ y=5-x \to y=2 \end{cases}.$$

Un bocadillo costaba 3 €; un refresco, 2 €; una bolsa de patatas, 1 €.

22. Madrid, julio 19, opción A

Ejercicio 1 . **Calificación máxima:** 2.5 puntos.

Dado el sistema de ecuaciones $\begin{cases} kx & + & (k+1)y & + & z & = & 0, \\ -x & + & ky & - & z & = & 0, \\ (k-1)x & - & y & & & = & -(k+1), \end{cases}$ se pide:

a) (2 puntos) Discutir el sistema según los valores del parámetro real k.

b) (0.5 puntos) Resolver el sistema para $k=-1$.

Solución:

a) Sea A la matriz de coeficientes y M la matriz ampliada.

$$A=\left(\begin{array}{ccc|c} k & k+1 & 1 & 0 \\ -1 & k & -1 & 0 \\ k-1 & -1 & 0 & -(k+1) \end{array}\right)=M$$

Si r(A) = r(M) = 3 $\to$ sistema compatible determinado: solución única.
Si r(A) = r(M) < 3 $\to$ sistema compatible indeterminado: infinitas soluciones.
Si r(A) < r(M) $\to$ sistema incompatible: no tiene solución

El determinante de A vale: $|A|=\begin{vmatrix} k & k+1 & 1 \\ -1 & k & -1 \\ k-1 & -1 & 0 \end{vmatrix}=-k-(k+1)\cdot(k-1)+1-k(k-1)=-2k^2+2$

$\to$ se anula si $k = \pm 1$.

Por tanto:

- Si $k \neq -1$ y 1, como $|A| \neq 0$, el sistema será compatible determinado: r(A) = r(M) = 3.
- Si $k = -1$, se tendrá: $A=\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)=M$ $\to$ se obtiene un sistema homogéneo, que

siempre es compatible. En este caso, indeterminado, pues el rango de A es 2, ya que $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}=1 \neq 0$.

- Si $k = 1$, se tendrá: $A=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \end{array}\right)=M$.

El rango de A es 2: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=3 \neq 0$; como el menor $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix}=6 \neq 0$, el rango de M es 3.

Por tanto, en este caso, el sistema será incompatible.

b) Si $k = -1$, se tiene: $\begin{cases} -x+z=0 \\ -x-y-z=0 \\ -2x-y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x+z=0 \\ -2x-y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=x \\ y=-2x \end{cases} \to (x=t)\text{:} \begin{cases} x=t \\ y=-2t \\ z=t \end{cases}.$

23. Madrid, julio 19, opción B

Ejercicio 1. **Calificación máxima:** 2.5 puntos.

Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1-a & 1 \\ 1 & 1+a \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) (1 punto) Calcular para qué valores $a \in \mathbb{R}$ se verifica $A^2 - I = 2A$.

b) (0.75 puntos) Calcular los números reales a para los que la matriz A admite inversa y calcularla, cuando sea posible, en función del parámetro a.

c) (0.75 puntos) Calcular, en función de a, el determinante de la matriz $(AA^t)^2$, donde A^t denota la matriz traspuesta de A.

Solución:

a) La ecuación $A^2 - I = 2A \Leftrightarrow A^2 - 2A = I$.

Operando:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1-a & 1 \\ 1 & 1+a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1-a & 1 \\ 1 & 1+a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-a)^2+1 & 2 \\ 2 & 1+(1+a)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2-2a+2 & 2 \\ 2 & a^2+2a+2 \end{pmatrix};$$

$$2A = 2\cdot\begin{pmatrix} 1-a & 1 \\ 1 & 1+a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2a & 2 \\ 2 & 2+2a \end{pmatrix}:$$

Luego:

$$A^2 - 2A = I \Rightarrow \begin{pmatrix} a^2-2a+2 & 2 \\ 2 & a^2+2a+2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2-2a & 2 \\ 2 & 2+2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow a = \pm 1.$$

b) Una matriz es invertible si su determinante no vale 0.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1-a & 1 \\ 1 & 1+a \end{vmatrix} = -a^2 \to |A| \neq 0 \text{ si } a \neq 0 \text{: existe la matriz inversa de } A.$$

Su inversa es $A^{-1} = \dfrac{(Adj(A))^t}{|A|}$.

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} 1+a & -1 \\ -1 & 1-a \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = -\frac{1}{a^2}\cdot\begin{pmatrix} 1+a & -1 \\ -1 & 1-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{1+a}{a^2} & \dfrac{1}{a^2} \\ \dfrac{1}{a^2} & -\dfrac{1-a}{a^2} \end{pmatrix}.$$

Comprobación: (debe cumplirse que $A \cdot A^{-1} = I$)

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1-a & 1 \\ 1 & 1+a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\dfrac{1+a}{a^2} & \dfrac{1}{a^2} \\ \dfrac{1}{a^2} & -\dfrac{1-a}{a^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{1-a^2}{a^2} + \dfrac{1}{a^2} & \dfrac{1-a}{a^2} - \dfrac{1-a}{a^2} \\ -\dfrac{1+a}{a^2} + \dfrac{1+a}{a^2} & \dfrac{1}{a^2} - \dfrac{1-a^2}{a^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

c) Como A es simétrica, $A \cdot A^t = A^2$. Por tanto, $(A \cdot A^t)^2 = A^4 \Rightarrow \left|(A \cdot A^t)^2\right| = |A^4| = |A|^4$.

Como $|A| = \begin{vmatrix} 1-a & 1 \\ 1 & 1+a \end{vmatrix} = -a^2 \Rightarrow \left|(A \cdot A^t)^2\right| = |A^4| = |A|^4 = (-a^2)^4 = a^8$.

24. Murcia, junio 19, opción B

B.1: Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) **[1 p.]** Calcule las potencias sucesivas A^2, A^3 y A^4.

b) **[0,5 p.]** Calcule la expresión general de A^n para cualquier valor de $n \in \mathbb{N}$.

c) **[1 p.]** Determine si existe la inversa de A. En caso afirmativo, calcúlela.

Solución:

a) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

$$A^3 = A \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$A^4 = A \cdot A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Voy a demostrar que la conjetura $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es cierta aplicando el método de demostración por inducción.

En efecto:

1. Se cumple para $n = 1$.
2. Supuesto cierto para n hay que ver se cumple para $n + 1$:

$$A^{n+1} = A \cdot A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & n & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n+1 & n+1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, la conjetura es cierta.

c) Como $|A| = 1 \neq 0$, la matriz A es invertible. Su inversa es $A^{-1} = \dfrac{(Adj(A))^t}{|A|}$.

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Comprobación: (debe cumplirse que $A \cdot A^{-1} = I$)

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

25. Navarra, junio 19, opción A

A1) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases} (a+2)x - y - az = -a \\ (-a-2)x + 2y + (a^2-a)z = 3a-1 \\ (a+2)x - 2y + (2-2a)z = -2a \end{cases}$$

(3 puntos)

Solución:
Para aligerar los cálculos conviene simplificar el sistema inicial aplicando transformaciones de Gauss):

$$\begin{cases} (a+2)x - y - az = -a \\ (-a-2)x + 2y + (a^2-a)z = 3a-1 \\ (a+2)x - 2y + (2-2a)z = -2a \end{cases} \to \begin{matrix} E2+E1 \\ E3-E1 \end{matrix} \begin{cases} (a+2)x - y - az = -a \\ y + (a^2-2a)z = 2a-1 \\ -y + (2-a)z = -a \end{cases} \to$$

$$\to \underset{E3+E2}{} \begin{cases} (a+2)x - y - az = -a \\ y + (a^2-2a)z = 2a-1 \\ (a^2-3a+2)z = a-1 \end{cases}$$

Sea A la matriz de coeficientes y M la matriz ampliada.

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} a+2 & -1 & -a & -a \\ 0 & 1 & a^2-2a & 2a-1 \\ 0 & 0 & a^2-3a+2 & a-1 \end{array}\right) = M$$

Si r(A) = r(M) = 3 $\to$ sistema compatible determinado: solución única.
Si r(A) = r(M) < 3 $\to$ sistema compatible indeterminado: infinitas soluciones.
Si r(A) < r(M) $\to$ sistema incompatible: no tiene solución
El determinante de A vale:

$$|A| = \begin{vmatrix} a+2 & -1 & -a \\ 0 & 1 & a^2-2a \\ 0 & 0 & a^2-3a+2 \end{vmatrix} = (a+2)\cdot(a^2-3a+2) = (a+2)\cdot(a-1)\cdot(a-2).$$

$\to$ Se anula si a = –2; a = 1; a = 2.
Por tanto:

- Si $a \neq$ –2, 1 y 2, como $|A| \neq 0$, el sistema será compatible determinado: r(A) = r(M) = 3.
- Si a = –2, $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 8 & -5 \\ 0 & 0 & 12 & -3 \end{array}\right) = M$.

El rango de A es 2, pues $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} \neq 0$. El rango de M es 3, pues $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & 8 & -5 \\ 0 & 12 & -3 \end{vmatrix} \neq 0$.

Por tanto, en este caso, el sistema será incompatible.

- Si $a = 1$: $A=\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)=M$ → Como hay una fila de ceros, el rango de ambas matrices es 2. Por tanto, en este caso, el sistema será compatible indeterminado.
- Si $a = 2$, $A=\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)=M$.

El rango de A es 2: $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$. El rango de M es 3, pues $\begin{vmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$.

Por tanto, en este caso, el sistema será incompatible.

Resolución:

→ Si $a \neq -2$, 1 y 2, como $|A| \neq 0$, el sistema es compatible determinado: r(A) = r(M) = 3.

Luego, aplicando la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} -a & -1 & -a \\ 2a-1 & 1 & a^2-2a \\ a-1 & 0 & a^2-3a+2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a+2 & -1 & -a \\ 0 & 1 & a^2-2a \\ 0 & 0 & a^2-3a+2 \end{vmatrix}} = \frac{(a-1)\cdot(a^2-2a+2)}{(a+2)\cdot(a-1)\cdot(a-2)} = \frac{a^2-2a+2}{(a+2)\cdot(a-2)};$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} a+2 & -a & -a \\ 0 & 2a-1 & a^2-2a \\ 0 & a-1 & a^2-3a+2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a+2 & -1 & -a \\ 0 & 1 & a^2-2a \\ 0 & 0 & a^2-3a+2 \end{vmatrix}} = \frac{(a+2)\cdot(a-1)\cdot(a-2)(3a-1)}{(a+2)\cdot(a-1)\cdot(a-2)} = 3a-1;$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} a+2 & -1 & -a \\ 0 & 1 & 2a-1 \\ 0 & 0 & a-1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a+2 & -1 & -a \\ 0 & 1 & a^2-2a \\ 0 & 0 & a^2-3a+2 \end{vmatrix}} = \frac{(a+2)\cdot(a-1)}{(a+2)\cdot(a-1)\cdot(a-2)} = \frac{1}{a-2}.$$

→ Si $a = 1$, se tiene: $\begin{cases} 3x-y-z=-1 \\ y-z=1 \\ 0z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2y=-2 \\ z=-1+y \end{cases} \Rightarrow (y=t) \Rightarrow \begin{cases} x=-2/3+2t/3 \\ y=t \\ z=-1+t \end{cases}$.

26. Navarra, junio 19, opción B

B1) Resuleve la ecuación matricial $X \cdot A^{35} = A^{25}$ teniendo en cuenta que A es la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(2 puntos)}$$

Solución:
Cálculo de algunas potencias de A:

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix};\ A^3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Con esto se deduce que: $A^3 = I$ y $A^2 = A^{-1}$.
Po tanto:

$$A^{25} = A \cdot A^{24} = A \cdot \left(A^3\right)^8 = A \cdot I = A;\ A^{35} = A^2 \cdot A^{33} = A^2 \cdot \left(A^3\right)^{11} = A^2 \cdot I = A^2.$$

Luego, la ecuación inicial, $X \cdot A^{35} = A^{25}$, puede escribirse como:

$$X \cdot A^2 = A \Leftrightarrow X \cdot A^{-1} = A \Rightarrow \left(X \cdot A^{-1}\right) \cdot A = A \cdot A \Rightarrow X = A^2 \to \text{Esto es: } X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

27. Navarra, julio 19, opción B

B1) Calcula los valores del parámetro t para que se cumpla la condición $|A \cdot B| = |A + B|$, siendo A y B las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & t-1 \\ 0 & -t & t \\ t+1 & 1-t & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ t+1 & t & t+1 \\ 1 & t-1 & t+1 \end{pmatrix}$$

(2 puntos)

Solución:

$$A + B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & t-1 \\ 0 & -t & t \\ t+1 & 1-t & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ t+1 & t & t+1 \\ 1 & t-1 & t+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & 0 & t-1 \\ t+1 & 0 & 2t+1 \\ t+2 & 0 & t+2 \end{pmatrix};$$

Como $A + B$ tiene una columna de ceros, entonces, $|A + B| = 0$. Por tanto, debe cumplirse que $|A \cdot B| = 0$.

Como $|A \cdot B| = |A| \cdot |B| \Rightarrow |A \cdot B| = 0$ si $|A| = 0$ o $|B| = 0$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & t-1 \\ 0 & -t & t \\ t+1 & 1-t & 1 \end{vmatrix} = t(t-1)\cdot(t+1) \to \text{vale 0 si } t = -1,\ t = 0 \text{ o } t = 1.$$

$$|B| = \begin{vmatrix} t & 0 & 0 \\ t+1 & t & t+1 \\ 1 & t-1 & t+1 \end{vmatrix} = t \cdot (t+1) \to \text{vale 0 si } t = -1 \text{ o } t = 0.$$

Por tanto, los valores de t que cumplen que $|A \cdot B| = |A + B|$ son si $t = -1$, $t = 0$ o $t = 1$.

28. País Vasco, junio 19

Ejercicio B1

Dada la matriz $A(a)$

$$A(a)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & a & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

calcular, razonadamente, el valor de *a* para que el determinante de $A(a)^2$ valga 4. (2 puntos)

Solución:

$$|A(a)|=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & a & 0\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=a \Rightarrow \left|A(a)^2\right|=a^2 \to a^2=4 \Rightarrow a=\pm 2\,.$$

29. País Vasco, julio 19

Ejercicio B1

Dada una matriz 3 × 3 cuyo determinante es igual a 5, se realizan sucesivamente las siguientes operaciones:

a) se cambian entre sí la primera y segunda fila,

b) se multiplica la tercera columna por –2,

c) se multiplica toda la matriz por 2 y

d) se traspone la matriz.

Calcular de forma razonada el determinante de la matriz obtenida.

Solución:

Hay que utilizar las propiedades de los determinantes.

a) Si se cambian entre sí dos filas el valor del determiante cambia de signo.
Luego, al hacer a), el valor del determinante de la matriz resultante es –5.

b) Si una columa se multiplica por un número *k* el determiante queda multiplicado por *k*.
Luego, si $k = -2$, el valor del determinante de la matriz resultante es (–2) · (–5) = 10.

c) Si una matriz se multiplica por un número *k* el determiante queda multiplicado por k^n, siendo *n* el orden de la matriz.
Luego, si $k = 2$ y $n = 3$, el valor del determinante de la matriz resultante es $2^3 \cdot 10 = 80$.

d) El determinante de una matriz vale lo mismo que el de su traspuesta.
Por tanto, el determiante de la matriz obtenida vale 80.