

## Opción A

### Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 2,5 puntos)

Sea el siguiente sistema de ecuaciones lineales: 
$$\begin{cases} 4ax + 4ay + 2z = 2a \\ ax + y - az = a \\ 4ax + 4ay + az = 4 \end{cases},$$
 se pide:

- (1,25 puntos) Discútase el sistema según los distintos valores del parámetro real  $a$ .
- (0,75 puntos) Resuélvase el sistema en el caso  $a = -1$ .
- (0,5 puntos) Resuélvase el sistema en el caso en que tenga infinitas soluciones.

#### Solución:

$$\begin{cases} 4ax + 4ay + 2z = 2a \\ ax + y - az = a \\ 4ax + 4ay + az = 4 \end{cases} \xrightarrow{\text{equivalente al sistema}} \begin{cases} 2ax + 2ay + z = a \\ ax + y - az = a \\ 4ax + 4ay + az = 4 \end{cases}$$

La matriz asociada al sistema es  $A = \begin{pmatrix} 2a & 2a & 1 \\ a & 1 & -a \\ 4a & 4a & a \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 2a & 2a & 1 \\ a & 1 & -a \\ 4a & 4a & a \end{vmatrix} = a \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2a & 1 \\ 1 & 1 & -a \\ 4 & 4a & a \end{vmatrix} = a(-2a^2 + 6a - 4)$

$$|A| = 0 \Rightarrow a(-2a^2 + 6a - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a^2 - 3a + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 1 \\ a = 2 \end{cases} \Rightarrow \text{si } a \neq 0, a \neq 1 \text{ y } a \neq 2 \Rightarrow \text{Rang } A = 3$$

Si  $a = 0$

La matriz ampliada es  $\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ ;  $\left. \begin{array}{l} \text{en } A \text{ encontramos el menor } \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{Rang}(A) = 2 \\ \text{en } \bar{A} \text{ tenemos } \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \Rightarrow \text{Rang}(\bar{A}) = 3 \end{array} \right\}$

Si  $a = 1$

La matriz ampliada es  $\bar{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ ;  $\left. \begin{array}{l} \text{en } A \text{ encontramos el menor } \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{Rang}(A) = 2 \\ \text{en } \bar{A} \text{ tenemos } \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \Rightarrow \text{Rang}(\bar{A}) = 3 \end{array} \right\}$

Si  $a = 2$

La matriz ampliada es  $\bar{A} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 & 2 \\ 8 & 8 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ ;  $\left. \begin{array}{l} \text{en } A \text{ encontramos el menor } \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{Rang}(A) = 2 \\ \text{en } \bar{A} \text{ tenemos } F_3 = 2F_1 \Rightarrow \text{Rang}(\bar{A}) = 2 \end{array} \right\}$

## Álgebra lineal.

Discusión:

Si  $a \neq 0, a \neq 1$  y  $a \neq 2$ ,  $\text{Rang}(A) = 3 = \text{Rang}(\bar{A}) = n^\circ$  de incógnitas  $\Rightarrow$  Sistema compatible determinado

Si  $a = 0$  o  $a = 1$ ,  $\text{Rang}(A) = 2 < \text{Rang}(\bar{A}) = 3 \Rightarrow$  Sistema incompatible

Si  $a = 2$ ,  $\text{Rang}(A) = 2 = \text{Rang}(\bar{A}) \Rightarrow$  Sistema compatible indeterminado (infinitas soluciones)

Resolvemos para  $a = -1$

$$\begin{cases} -2x - 2y + z = -1 \\ -x + y + z = -1 \\ -4x - 4y - z = 4 \end{cases} ; |A| = \begin{vmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -4 & -4 & -1 \end{vmatrix} = 12 ; \text{solución única} \Rightarrow \text{resolvemos por la regla de Cramer:}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 4 & -4 & -1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-9}{12} = -\frac{3}{4} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} \quad z = \frac{\begin{vmatrix} -2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -4 & -4 & 4 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-24}{12} = -2$$

Resolvemos para  $a = 2$

El menor de orden 2 distinto de cero era  $\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow$  esto nos indica que debemos quedarnos con las dos primeras ecuaciones y considerar la incógnita  $x$  como parámetro:

$$\begin{cases} 4x + 4y + z = 2 \\ 2x + y - 2z = 2 \\ 8x + 8y + 2z = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4y + z = 2 - 4x \\ y - 2z = 2 - 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{6 - 10x}{9} \\ z = \frac{-6 + 4x}{9} \end{cases} \Rightarrow \text{solución: } \begin{cases} x = \lambda \\ y = \frac{6 - 10\lambda}{9} \\ z = \frac{-6 + 4\lambda}{9} \end{cases}$$

### Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Resuelve la ecuación  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & x & x+2 & 2x+1 \\ 1 & x^2 & 2x+1 & x^2+2x \\ 1 & x^3 & 3x & 3x^2 \end{vmatrix} = 0$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & x & x+2 & 2x+1 \\ 1 & x^2 & 2x+1 & x^2+2x \\ 1 & x^3 & 3x & 3x^2 \end{vmatrix} \stackrel{\substack{F_2=F_2-F_1 \\ F_3=F_3-F_1 \\ F_4=F_4-F_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & x-1 & x-1 & 2x-2 \\ 0 & x^2-1 & 2x-2 & x^2+2x-3 \\ 0 & x^3-1 & 3x-3 & 3x^2-3 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} x-1 & x-1 & 2(x-1) \\ (x-1)(x+1) & 2(x-1) & (x-1)(x+3) \\ (x-1)(x^2+x+1) & 3(x-1) & 3(x-1)(x+1) \end{vmatrix} =$$

$$= (x-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ (x+1) & 2 & (x+3) \\ (x^2+x+1) & 3 & 3(x+1) \end{vmatrix} \stackrel{\substack{C_1=C_1-C_2 \\ C_3=C_3-2C_2}}{=} (x-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ x-1 & 2 & x-1 \\ x^2+x-2 & 3 & 3x-3 \end{vmatrix} = (x-1)^3 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} x-1 & x-1 \\ (x-1)(x+2) & 3(x-1) \end{vmatrix} =$$

$$= -(x-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x+2 & 3 \end{vmatrix} = -(x-1)^5 \cdot (1-x) = (x-1)^6 \Rightarrow (x-1)^6 = 0 \Rightarrow x = 1$$

**Ejercicio 3.** (Puntuación máxima: 2 puntos)

Dada la matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$ ,

- (0,5 puntos) Determina los valores de  $a$  para los que la matriz  $A$  admite inversa.
- (1,25 punto) Calcula la matriz  $A^{-1}$  en función del parámetro  $a$ .

- (0,75 puntos) Para  $a = 2$ , resuelve el sistema  $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Solución:

$A$  tiene inversa  $\Leftrightarrow |A| \neq 0$

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix} = a \Rightarrow$  Si  $a \neq 0$ , la matriz  $A$  tiene inversa.

Ahora calculemos  $A^{-1}$  para  $a \neq 0$

$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$ ,  $|A| = a$

$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a$        $A_{21} = -\begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = 1 - a^2$        $A_{31} = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$   
 $A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \end{vmatrix} = 0$        $A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{vmatrix} = a$        $A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$        $\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{a} \begin{pmatrix} a & 1 - a^2 & -1 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$   
 $A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$        $A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$        $A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1-a^2}{a} & -\frac{1}{a} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{a} & \frac{1}{a} \end{pmatrix}$

Para resolver el sistema  $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  para  $a = 2 \Rightarrow A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{5}{2} \\ y = 1 \\ z = \frac{1}{2} \end{cases}$

**Ejercicio 4.** (Puntuación máxima: 2 puntos)

Dadas las matrices de la forma  $A = \begin{pmatrix} 2 & a \\ b & c \end{pmatrix}$ , se pide:

- (1 punto) Encuentra todas las matrices  $A$  que satisfacen  $A^2 = A - I$ . Siendo  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- (0,75 puntos) Calcula la matriz  $(A^5)^{-1}$ .
- (0,75 puntos) Halla la matriz  $A^{28}$ .

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a \\ b & c \end{pmatrix} \text{ verifica que } A^2 = A - I$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & a \\ b & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & a \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+ab & 2a+ac \\ 2b+bc & ab+c^2 \end{pmatrix}; \quad A - I = \begin{pmatrix} 2 & a \\ b & c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & c-1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4+ab & 2a+ac \\ 2b+bc & ab+c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & c-1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 4+ab=1 \\ 2a+ac=a \\ 2b+bc=b \\ ab+c^2=c-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ab=-3 \Rightarrow b=-\frac{3}{a} \\ a(2+c)=a \Rightarrow 2+c=1 \Rightarrow c=-1 \\ b(2+c)=b \Rightarrow 2+c=1 \Rightarrow c=-1 \\ ab+c^2=c-1 \Rightarrow -3+(-1)^2=-1-1 \end{cases}$$

Entonces, las matrices pedidas son de la forma  $A = \begin{pmatrix} 2 & a \\ -\frac{3}{a} & -1 \end{pmatrix}$

Ahora calculemos  $(A^5)^{-1}$ .  $A^2 = A - I$ ;  $A^3 = A \cdot (A - I) = A^2 - A = A - I - A = -I$

Como  $A^3 = -I \Rightarrow A^6 = I \Rightarrow A \cdot A^5 = I \Rightarrow A$  es la matriz inversa de  $A^5 \Rightarrow (A^5)^{-1} = A$ ;  $(A^5)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & a \\ -\frac{3}{a} & -1 \end{pmatrix}$

$$A^{28} = A^{24} \cdot A^4 = (A^6)^4 \cdot A^4 = I^4 \cdot A^4 = A^4 = A^3 \cdot A = -I \cdot A = -A; \quad A^{28} = -A \Rightarrow A^{28} = \begin{pmatrix} -2 & -a \\ \frac{3}{a} & 1 \end{pmatrix}$$

## Opción B

**Ejercicio 1.** (Puntuación máxima: 2,5 puntos)

Se considera el sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- (1,25 puntos) Discutirlo según los valores del parámetro real  $m$ .
- (1,25 puntos) Resolverlo en los casos de compatibilidad.

Solución:

Como el sistema tiene 4 ecuaciones y 3 incógnitas, empezamos analizando el rango de la matriz ampliada.

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & m \\ 1 & 1 & m & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 \\ m & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |\bar{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & m \\ 1 & 1 & m & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 \\ m & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} F_2 = F_2 - F_1 \\ F_3 = F_3 - F_1 \\ F_4 = F_4 - F_1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & m \\ 0 & 0 & m-1 & 1-m \\ 0 & m-1 & 0 & 1-m \\ m-1 & 0 & 0 & 1-m \end{vmatrix} \begin{matrix} C_4 = C_4 + C_1 + C_2 + C_3 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & m+3 \\ 0 & 0 & m-1 & 0 \\ 0 & m-1 & 0 & 0 \\ m-1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (m-1)^3(m+3) ; |\bar{A}| = 0 \Rightarrow (m-1)^3(m+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m=1 \\ m=-3 \end{cases} \Rightarrow \text{si } m \neq 1 \text{ y } m \neq -3, \text{ Rang } \bar{A} = 4$$

Si  $m=1$

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ todas las filas son iguales} \Rightarrow \text{Rang } A = \text{Rang } \bar{A} = 1$$

Si  $m=-3$

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} |\bar{A}| = 0 \Rightarrow \text{Rang } \bar{A} < 4 \\ \text{en } A \text{ encontramos el menor } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -16 \Rightarrow \text{Rang } A = 3 \end{cases}$$

*Discusión:*

Si  $m \neq 1$  y  $m \neq -3$ ,  $\text{Rang}(A) = 3 < \text{Rang}(\bar{A}) = 4 \Rightarrow$  Sistema incompatible

Si  $m=1$ ,  $\text{Rang}(A) = 1 = \text{Rang}(\bar{A}) \Rightarrow$  Sistema compatible indeterminado (infinitas soluciones)

Si  $m=-3$ ,  $\text{Rang}(A) = 3 = \text{Rang}(\bar{A}) = n^\circ$  de incógnitas  $\Rightarrow$  Sistema compatible determinado

Resolvemos para  $m=1$

Todas las ecuaciones son iguales  $\Rightarrow$  el sistema se reduce a:  $x+y+z=1 \Rightarrow x=1-y-z \Rightarrow \begin{cases} x=1-\lambda-\mu \\ y=\lambda \\ z=\mu \end{cases}$

Resolvemos para  $m = -3$

En  $A$  teníamos el menor  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -16 \Rightarrow$  las tres primeras ecuaciones son linealmente independientes y

podemos prescindir de la cuarta por ser combinación lineal de las otras tres.

$$\begin{cases} x + y + z = -3 \\ x + y - 3z = 1 \\ x - 3y + z = 1 \end{cases} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -16 \quad \text{y aplicamos la regla de Cramer.}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{16}{-16} = -1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{16}{-16} = -1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{16}{-16} = -1$$

**Ejercicio 2.** (Puntuación máxima: 2,5 puntos)

- (0,75 puntos) Encuentra los valores de  $a$  para que los vectores,  $e_1 = (-a, a, 0)$ ,  $e_2 = (0, a-1, a)$ ,  $e_3 = (a, 0, a+2)$  sean una base de  $\mathbb{R}^3$ .
- (0,75 puntos) Para uno de esos valores de  $a$ , calcula las coordenadas del vector  $v = (1, -2, 3)$  en la base formada por  $\{e_1, e_2, e_3\}$
- (1 punto) Para algún valor de  $a \neq 0$ , busca una relación de dependencia lineal entre los vectores  $e_1, e_2, e_3$ .

Solución:

Para que tres vectores formen una base de  $\mathbb{R}^3$ , basta con que sean linealmente independientes puesto que, si en un espacio vectorial tenemos el mismo número de vectores linealmente independientes que la dimensión del espacio, automáticamente son base.

Veamos para qué valores de  $a$ , los vectores  $e_1, e_2$  y  $e_3$ , son linealmente independientes.

$$e_1 = (-a, a, 0), e_2 = (0, a-1, a), e_3 = (a, 0, a+2)$$

$$\begin{vmatrix} -a & 0 & a \\ a & a-1 & 0 \\ 0 & a & a+2 \end{vmatrix}_{F_2=F_2+F_1} = \begin{vmatrix} -a & 0 & a \\ 0 & a-1 & a \\ 0 & a & a+2 \end{vmatrix} = -a \cdot \begin{vmatrix} a-1 & a \\ a & a+2 \end{vmatrix} = -a \cdot [(a-1)(a+2) - a^2] = -a(a-2)$$

$$\begin{vmatrix} -a & 0 & a \\ a & a-1 & 0 \\ 0 & a & a+2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -a(a-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 2 \end{cases} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} e_1, e_2 \text{ y } e_3 \text{ forman base de } \mathbb{R}^3 \text{ para todo valor de } \\ a \text{ tal que } a \neq 0 \text{ y } a \neq 2. \end{array} \right.$$

$$\text{Supongamos ahora que } a = -1 \Rightarrow e_1 = (1, -1, 0), e_2 = (0, -2, -1), e_3 = (-1, 0, 1)$$

$v = (1, -2, 3)$  es un vector de  $\mathbb{R}^3$  cuyas coordenadas están expresadas en la base canónica.

En la base  $\{e_1, e_2, e_3\}$  tendrá coordenadas  $v = (x, y, z) \Rightarrow v = x \cdot e_1 + y \cdot e_2 + z \cdot e_3$

$$(1, -2, 3) = x \cdot (1, -1, 0) + y \cdot (0, -2, -1) + z \cdot (-1, 0, 1) \Rightarrow (1, -2, 3) = (x - z, -x - 2y, -y + z) \Rightarrow$$

$$(1, -2, 3) = (x - z, -x - 2y, -y + z) \Rightarrow \begin{cases} x - z = 1 \\ -x - 2y = -2 \\ -y + z = 3 \end{cases} \xrightarrow{1+2^a} \begin{cases} x - y = 4 \\ -x - 2y = -2 \end{cases} \xrightarrow{1+2^a} -3y = 2 \Rightarrow y = -\frac{2}{3}$$

$$x = 4 - \frac{2}{3} = \frac{10}{3} ; z = 3 - \frac{2}{3} = \frac{7}{3} \Rightarrow v = \left( \frac{10}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{7}{3} \right) \text{ en la base } \{e_1, e_2, e_3\}.$$

Para que  $e_1, e_2, e_3$  sean linealmente dependientes,  $a = 0$  o  $a = 2$ . Como  $a \neq 0$ , entonces debe ser  $a = 2 \Rightarrow e_1 = (-2, 2, 0), e_2 = (0, 1, 2), e_3 = (2, 0, 4)$  y la combinación lineal  $\lambda_1 \cdot e_1 + \lambda_2 \cdot e_2 + \lambda_3 \cdot e_3 = 0$  tendrá valores de  $\lambda_i$  no todos cero.

Como  $e_2$  y  $e_3$  son linealmente independientes al no ser proporcionales  $\Rightarrow e_1$  se podrá poner como combinación lineal de ellos  $\Rightarrow e_1 = \lambda \cdot e_2 + \mu \cdot e_3 \Rightarrow (-2, 2, 0) = \lambda \cdot (0, 1, 2) + \mu \cdot (2, 0, 4)$

$$(-2, 2, 0) = (2\mu, \lambda, 2\lambda + 4\mu) \Rightarrow \begin{cases} 2\mu = -2 \rightarrow \mu = -1 \\ \lambda = 2 \\ 2\lambda + 4\mu = 0 \rightarrow 2 \cdot 2 + 4 \cdot (-1) = 0 \end{cases} \Rightarrow e_1 = 2e_2 - e_3 \Rightarrow e_1 - 2e_2 + e_3 = 0$$

**Ejercicio 3.** (Puntuación máxima: 2,5 puntos)

Discute y resuelve según los valores del parámetro real  $\lambda$  el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} (\lambda - 4)x + y + 2z = 0 \\ -3x + \lambda y + 2z = 0 \\ -5x + y + (\lambda + 3)z = 0 \end{cases}$$

Solución:

$$\begin{cases} (\lambda - 4)x + y + 2z = 0 \\ -3x + \lambda y + 2z = 0 \\ -5x + y + (\lambda + 3)z = 0 \end{cases} ; \text{ Es un sistema homogéneo y en todos los casos será compatible.}$$

Rang  $A = \text{Rang } \bar{A}$  puesto que  $\bar{A} = \begin{pmatrix} A & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \end{pmatrix}$  y la última columna siempre será linealmente dependiente del resto.

la matriz asociada al sistema es  $A = \begin{pmatrix} \lambda - 4 & 1 & 2 \\ -3 & \lambda & 2 \\ -5 & 1 & \lambda + 3 \end{pmatrix}$ ;  $|A| = \begin{vmatrix} \lambda - 4 & 1 & 2 \\ -3 & \lambda & 2 \\ -5 & 1 & \lambda + 3 \end{vmatrix} = \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1$

$$|A| = 0 \Rightarrow \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 = 0 \Rightarrow (\lambda - 1)^2(\lambda + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda = -1 \end{cases}$$

Si  $\lambda \neq 1$  y  $\lambda \neq -1$ , Rang  $(A) = 3 = \text{Rang } (\bar{A}) = n^\circ$  de incógnitas  $\Rightarrow$  Sistema compatible determinado.

En estos casos, como  $\{x = 0, y = 0, z = 0\}$  es solución y debe ser única, ya está resuelto.

Si  $\lambda = 1 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 2 \\ -5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$  y Rang  $A = 2$  puesto que  $\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow$  Sistema compatible indeterminado.

Nos quedamos con las ecuaciones 2ª y 3ª  $\begin{cases} -3x + y + 2z = 0 \\ -5x + y + 4z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3x + y = -2z \\ -5x + y = -4z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = z \\ y = z \end{cases} \Rightarrow \text{solución: } \begin{cases} x = \mu \\ y = \mu \\ z = \mu \end{cases}$

Si  $\lambda = -1 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 2 \\ -3 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$  y  $\text{Rang } A = 2$  puesto que  $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow$  Sistema compatible indeterminado.

Nos quedamos con las ecuaciones 2ª y 3ª  $\begin{cases} -3x - y + 2z = 0 \\ -5x + y + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -y + 2z = 3x \\ y + 2z = 5x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x \\ z = 2x \end{cases} \Rightarrow$  solución:  $\begin{cases} x = \mu \\ y = \mu \\ z = 2\mu \end{cases}$

**Ejercicio 4.** (Puntuación máxima: 2,5 puntos)

Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

encuentra una matriz  $X$  tal que  $A \cdot X \cdot A^T = B$

Solución:

$$X \in M_{3 \times 3}; \text{ como } A \cdot X \cdot A^T = B \Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X \cdot A^T \cdot (A^T)^{-1} = A^{-1} \cdot B \cdot (A^T)^{-1} \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B \cdot (A^T)^{-1}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = -1; \quad \begin{matrix} A_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 & A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2 & A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \\ A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 & A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 & A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \\ A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 & A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -3 & A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \end{matrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Podemos calcular  $(A^T)^{-1}$  como la inversa de la matriz  $A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  o mejor así:  $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$$X = A^{-1} \cdot B \cdot (A^T)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ -3 & -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$