EXÁMENES PCE
BLOQUE I

MAYO 2021

1. Sea el polinomio p(x) = $\begin{vmatrix} x^2 & x^2 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix}$ (determinante). Entonces:
   a. p(a) = 0 para algún valor a > 0.
   b. El grado de p(x) es menor que 4.
   c. Ninguna de las otras dos.

Solución / vídeo

2. Sea la matriz B = A^4, donde A = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $b_{3,1}$ el número de la tercera fila y la primera columna de B. Entonces:
   a. b.$_{3,1}$ es un número par.
   b. b.$_{3,1}$ > 10.
   c. Ninguna de las otras dos.

Solución / vídeo

3. Sea el sistema de ecuaciones lineales

$$S \equiv \begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}z = 1 \\ 3x - y + z = 2 \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + z = 3 \end{cases}$$

Entonces la solución cumple:
   a. x < z
   b. y > x + z
   c. Ninguna de las otras dos.

Solución / vídeo

4. Sea el polinomio p(x) = $\begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ x & 1 & x \\ x & x & 1 \end{vmatrix}$ (determinante). Entonces:

a. El grado de p(x) es menor que 3.
b. p(x) = 0 tiene dos raíces enteras.
c. Ninguna de las otras dos.

Solución / vídeo

5. Sea el sistema de ecuaciones lineales $s \equiv \begin{cases} x + y + 3z = 1 \\ x + z = 1 \\ x + 2y + 3z = 2 \end{cases}$

Entonces una solución cumple:

a. xy > z
b. yz > x
c. Ninguna de las otras dos.

Solución / vídeo

6. (2,5 puntos). Sea la matriz C= A2 – 4A – 6B, donde $A = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Estudie el **rango de C** en función del valor del número real **a**.

Solución / vídeo

7. (2,5 p). Sean las matrices A = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y B = A^{-1} – A. Estudie el rango de la matriz B.

Solución / vídeo

➢ JULIO 2020

8. Dada la matriz A = $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, la suma de los elementos de la diagonal principal de la matriz A – 3I, siendo I la matriz identidad es:

a. –5   b. -3   c. 0

Solución / vídeo

9. La inversa de la matriz B = $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, es:

a. $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Solución / vídeo

10. Sean A y B dos matrices de 2x2. La igualdad:

$$(A + B) \cdot (A - B) = A^2 - B^2$$

Se cumple:

a. Siempre
b. Solo si AB = BA
c. Solo si A = B

Solución / vídeo

11. El rango de la matriz A= $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ es:

a. Uno b. Dos c. Tres

Solución / vídeo

12. Sea A una matriz cuadrada de tamaño 3x3. Si el determinante de A es 3, entonces el determinante de la inversa A^{-1} es:

a. $\mathrm{Det}(A^{-1}) = -3$
b. $\mathrm{Det}(A^{-1}) = 1/3$
c. $\mathrm{Det}(A^{-1}) = 3$

Solución / vídeo

13. Toda matriz A que verifica $A^4 = I$, siendo I la matriz identidad, satisface la siguiente propiedad:

a. $A^{-1} = A^3$, siendo A^{-1} la matriz inversa.
b. El determinante de A es 1
c. $A^2 = A^T$, siendo A^T la matriz traspuesta.

Solución / vídeo

14. Dadas las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & 1\end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

Si X es la solución de la ecuación matricial: **AX + B + C = I**

Siendo I la matriz identidad, entonces el elemento de la primera fila y la primera columna de X es:

a. -3
b. -2
c. 3

Solución / vídeo

15. El sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x+y-2z=1\\ x-y+2z=-2\\ 3x-y+2z=4 \end{cases}$$

a. Tiene una única solución
b. No tiene solución
c. Tiene infinitas soluciones

Solución / vídeo

16. El sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 3x+y=1\\ x-y+2z=-2\\ 5x+y+2z=4 \end{cases}$$

a. Tiene una única solución
b. No tiene solución
c. Tiene infinitas soluciones

Solución / vídeo

17. El rango de la matriz $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ -2 & 4 & -1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$

a. Uno b. Dos c. Tres

Solución / vídeo

18. La matriz A= $\begin{pmatrix} 3 & m & 0 \\ m & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ no es invertible cuando:

a. m = ±1

b. m =0

c. m = ±3

Solución / vídeo

19. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz A – BC es:

a. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

Solución / vídeo

20. Si A es la matriz A= $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & 0 \end{pmatrix}$, entonces la ecuación matricial $\mathbf{A^2 - aI = O}$, siendo I y O las matrices identidad y nula de orden 2x2 respectivamente, se verifica:

a. Para todo valor de a

b. Solo si a = 2 ó a = 1/2

c. Solo si a = 1 ó a = 2/3

Solución / vídeo

➢ MAYO 2019

21. Sea A una matriz 3 x 3 tal que $A^3 = -I$, siendo I la matriz identidad, entonces:

a. $A^{10} = A$

b. $A^{10} = -A$

c. $A^{10} = I$

Solución / vídeo

22. (2,5 p). Dado el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ ax + y + 2z = 0 \\ x - y + az = 1 \end{cases}$$

a. (1,5 puntos) Determine cuántas soluciones tiene dicho sistema en función de los valores del parámetro ***a***.
b. (0,5 puntos) Resuelva el sistema para el valor ***a* = −1**.
c. (0,5 puntos) Resuelva el sistema para el valor **a = 2**

Solución / vídeo

SEPTIEMBRE 2018

23. Si el determinante $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 5$, entonces el determinante $\begin{vmatrix} 2a & 7b \\ 2c & 7d \end{vmatrix}$ es:

a. 10 b. 35 c. 70

Solución

JUNIO 2018

24. El rango de la matriz A= $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ es:

a. 1 b. 2 c. 3

Solución / vídeo

2017

25. (2,5 puntos). Se desea recargar el cajero de un banco con billetes de 10, 20 y 50€. Por cada billete de 50 se ha de introducir uno de 20, mientras que por cada 2 billetes de 20 se han de introducir 3 de 10.

- Plantear un sistema de ecuaciones para determinar la proporción de cada una de las denominaciones de billetes que hay que introducir en el cajero. Resolver el sistema.
- Si el importe total en euros de todos los billetes ha de ser 28500€, ¿cuántos billetes de cada denominación hay que introducir en el cajero?

Solución / vídeo

26. Sea la matriz A= $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ y sea A^{-1} su matriz inversa. Entonces el elemento a_{22} de la segunda fila y segunda columna de la matriz inversa A^{-1} es:

a. 0 b. -1 c. 1

Solución / vídeo

27. Sea la matriz A= $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. Entonces:

a. $A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$

b. $A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 9 \end{pmatrix}$

c. $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -5 & 8 \end{pmatrix}$

Solución / vídeo

28. (2,5 puntos). En una tienda online se han vendido 800 ejemplares de un libro de texto, entre nuevos y usados, y se han obtenido un total de 7110€. Un ejemplar nuevo cuesta 10€, mientras que los ejemplares usados se venden con un descuento que puede ser del 40% o del 50% según sea el estado del ejemplar. Se ha comprobado que por cada tres libros nuevos se ha vendido uno usado.

- Plantear un sistema de ecuaciones para hallar el número de ejemplares nuevos que se han vendido.
- Calcular cuántos ejemplares se vendieron con un descuento del 50%.

Solución / vídeo

29. Sea la matriz A= = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Entonces el elemento a_{31} de la tercera fila y la primera columna de la matriz inversa A^{-1} es:

a. 0 b. -1 c. -2

Solución / vídeo

30. Sea la matriz A= = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ tiene rango:

a. 1 b. 2 c. 3

Solución / vídeo

31. (2,5 puntos). En una tienda de deportes se han vendido 500 balones de baloncesto, nuevos y usados, y se han obtenido un total de 10406€. Los balones nuevos se vendieron a 22€ y los balones usados con descuentos del 20% y 30%. Se sabe que el número de balones usados vendidos ha sido la cuarta parte que los balones nuevos.

- Plantear un sistema de ecuaciones para hallar el número de balones nuevos que se han vendido.
- Calcular cuántos balones usados se vendieron con descuento del 20%.

Solución / vídeo

32. (2,5 puntos). Se han comprado tres productos A, B y C. Sin tener en cuenta el IVA, el producto C vale 360€ menos que la suma de lo que cuestan A y B conjuntamente, mientras que el importe total de los tres productos asciende a 800€. El producto A para un IVA del 6%, el producto B del 12% y el producto C del 30%. La factura total con IVA importa 917.60€.

- Plantear un sistema de ecuaciones para calcular la cantidad, sin IVA, que cuesta cada producto.
- Resolver el sistema por el método de Cramer.

Solución / vídeo

33. Sea la matriz A= $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Entonces la matriz inversa A^{-1} es:

a. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

b. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$

c. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

Solución / vídeo

34. Se consideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

El producto de las matrices A·B es:

a. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Solución

35. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Entonces la matriz inversa A^{-1} es:

a. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

b. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

c. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Solución / vídeo

36. Se consideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

La segunda fila de la matriz producto A·B es:

a. $\begin{pmatrix} -1 & 6 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} -1 & 3 \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} -1 & 4 \end{pmatrix}$

Solución / vídeo

37. Dada la matriz A= $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, la suma de los elementos de la primera columna de su matriz inversa A^{-1} es:

a. 1 b. 0 c. -1

Solución / vídeo

38. Sea el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x + ay + z = 1 \\ ax + y + (a-1)z = 1 \\ x + y + z = a + 1 \end{cases}$$

Para el valor de a= 1 el sistema es:

a. Compatible determinado.
b. Compatible indeterminado.
c. Incompatible.

Solución / vídeo

➢ SOLUCIONES

1. Opción a.

$$p=\begin{vmatrix} x^2 & x^2 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix}\begin{matrix} x^2 & x^2 \\ 1 & x \\ 1 & 1 \end{matrix}\Bigg| = x^4+\cancel{x^2}+1-x^3-\cancel{x^2}-x=0$$

$$= x^4-x^3-x+1=0$$

$$p(1)=1-1-1+1=0 \to \underline{\underline{\text{sí}}}$$

$$p(2)=2^4-2^3-2+1=7 \to \underline{\underline{\text{NO}}}$$

2. Opción a.

$$B=A^4$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$¿b_{31}? = 8$$

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^4=A^2\cdot A^2=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 \\ \underset{\downarrow}{\textcircled{8}} & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

b_{31} = Fila3/Col1

3. Opción b.

(Hecho con calculadora). Se puede resolver por Cramer.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1/2 & 0 & 1/3 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 & 3 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{matrix} x=2 \\ y=4 \\ z=0 \end{matrix}$$

Entonces la solución cumple:

1. x < z $\longrightarrow 2<0 \to \underline{\text{NO}}$
2. y > x + z $\longrightarrow 4>2+0 \to \underline{\text{sí}}$
3. Ninguna de las otras dos.

4. Opción b.

$$p(x)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ x & 1 & x \\ x & x & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 1 \\ x & 1 \\ x & x \end{matrix}\Bigg| = 1+\cancel{x^2}+x^3-x-\cancel{x^2}-x^2=0$$

$$= x^3-x^2-x+1=0 \to (\text{grado } 3)$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -1 & -1 & 1 \\ x=1 & & 1 & 0 & -1 \\ \hline & 1 & 0 & -1 & \boxed{0} \\ x=-1 & & -1 & 1 & \\ \hline & 1 & -1 & \boxed{0} & \\ x=1 & & 1 & & \\ \hline & 1 & \boxed{0} & & \end{array}$$

$\underline{\text{Raíces}}$: $x=1$, $x=-1$

$$(x-1)^2(x+1)$$

5. Opción a.

$$\left.\begin{array}{r} x+y+3z=1 \\ x+z=1 \\ x+2y+3z=2 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} \underline{\text{sol}} \\ x=1'5 \\ y=1 \\ z=\frac{-1}{2}=-0'5 \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{array}{l} xy=1'5\cdot 1=\overbrace{1'5}^{xy} \overset{>}{>} \overbrace{-0'5}^{z} \rightarrow \underline{\underline{\text{sí}}} \\ yz=1\cdot(-0'5)=\overbrace{-0'5}^{yz}>\overbrace{1'5}^{x} \rightarrow \underline{\underline{\text{NO}}} \end{array}$$

$xy>z$

$yz>x$

6. Solución del problema:

$$C=\overbrace{A^2-4A}-6B$$

- $4A=\begin{pmatrix} 4a & 0 & 4a \\ 0 & 4 & 0 \\ 4a & 0 & 4a \end{pmatrix}$
- $6B=\begin{pmatrix} 6 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & 0 \\ 6 & 0 & 6 \end{pmatrix}$
- $A^2=\begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2a^2 & 0 & 2a^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2a^2 & 0 & 2a^2 \end{pmatrix}$

$$A^2-4A=\begin{pmatrix} 2a^2 & 0 & 2a^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2a^2 & 0 & 2a^2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 4a & 0 & 4a \\ 0 & 4 & 0 \\ 4a & 0 & 4a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2a^2-4a & 0 & 2a^2-4a \\ 0 & -3 & 0 \\ 2a^2-4a & 0 & 2a^2-4a \end{pmatrix}$$

$$(A^2-4A)-6B=\begin{pmatrix} 2a^2-4a & 0 & 2a^2-4a \\ 0 & -3 & 0 \\ 2a^2-4a & 0 & 2a^2-4a \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 6 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & 0 \\ 6 & 0 & 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2a^2-4a-6 & 0 & 2a^2-4a-6 \\ 0 & -9 & 0 \\ 2a^2-4a-6 & 0 & 2a^2-4a-6 \end{pmatrix}=C$$

$$|C|=\left|\begin{array}{ccc|cc} 2a^2-4a-6 & 0 & 2a^2-4a-6 & 2a^2-4a-6 & 0 \\ 0 & -9 & 0 & 0 & -9 \\ 2a^2-4a-6 & 0 & 2a^2-4a-6 & 2a^2-4a-6 & 0 \end{array}\right|=-9(2a^2-4a-6)(2a^2-4a-6)-\left[-9(2a^2-4a-6)(2a^2-4a-6)\right]=0$$

(no existen valores de a)

- $rg=3 \rightarrow |C|_{3x3}\neq 0 \rightarrow$ para todos los valores de a, $\nexists$ $rg=3$
- $\begin{vmatrix} 2a^2-4a-6 & 0 \\ 0 & -9 \end{vmatrix}_{2x2}\neq 0 \rightarrow rg=2 \rightarrow (2a^2-4a-6)(-9)=0 \rightarrow -18a^2+36a+54 \begin{cases} a=3 \\ a=-1 \end{cases}$

→ cuando $a\neq 3$ ó $a\neq -1$ → $rg(C)=2$

→ cuando $a=3$ ó $a=-1$ → $rg(C)=1$

→ para ningún valor $\exists$ $rg(C)=3$.

7. Solución del problema:

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\rightarrow |A|=1 \qquad \rightarrow B=A^{-1}-A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-2&-1\\0&0&-2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\text{Adj } A=\begin{bmatrix}\begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}0&1\\0&1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}0&1\\0&0\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1&1\\0&0\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}1&1\\1&1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix}\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}$$

¿Rango de B?

$$|B|_{3\times3}=0$$

$$|B|_{2\times2}=\begin{vmatrix}-2&-1\\0&-2\end{vmatrix}\neq 0 \rightarrow \boxed{\text{rango}(B)=2}$$

$$A^{-1}=\frac{\text{Adj } A^t}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}}{1}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

8. Opción b.

$$I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}_{3\times3}\rightarrow 3\cdot I=3\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{pmatrix}$$

$$A-3I=\begin{pmatrix}3&-2&2\\-1&4&0\\1&0&-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-2&2\\-1&1&0\\1&0&-4\end{pmatrix}=0+1+(-4)=\boxed{-3}$$

9. Opción c.

$$\boxed{B^{-1}=\frac{\text{Adj } B^t}{|B|}}$$

$$\exists B^{-1}\longleftrightarrow |B|\neq 0$$

$$|B|=\begin{vmatrix}1&-1\\0&1\end{vmatrix}=1 \longrightarrow \frac{\text{Adj } B^t}{|B|}=\frac{\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}}{1}=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$$

$$\text{Adj } B=\begin{pmatrix}a_{11}&-a_{12}\\-a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\+1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$$

10. Opción b.

$$(a+b)(a-b)=a^2+\overset{\frown}{2ab}+b^2$$

$$(A+B)(A-B)=A^2-\underbrace{\cancel{AB}}+\underbrace{\cancel{BA}}-B^2=\underbrace{A^2-B^2} \quad \leftarrow \boxed{A\cdot B\neq B\cdot A}$$

$$\boxed{AB=BA}$$

11. Opción b.

$$|A|_{3x3} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{rg}(A)\text{ será} \leq 2 \begin{array}{l} \nearrow = 2 \\ \searrow = 1 \end{array}$$

$$|A|_{2x2} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow \boxed{\text{rg}(A) = 2}$$

12. Opción b.

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} \rightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{3}$$

$$\hookrightarrow |A| = 3$$

13. Opción a.

Si $A^4 = I$

$$A^4 \Rightarrow A^3 \cdot A = I \Rightarrow A^3 = \frac{I}{A} \Rightarrow A^3 = \overbrace{I \cdot A^{-1}}^{\times 1} \Rightarrow \boxed{A^3 = A^{-1}}$$

14. Opción a.

$$AX + (B+C) = I$$

$$AX = I - (B+C)$$

$$X = \frac{I-(B+C)}{A}$$

$$X = A^{-1} \cdot [I-B-C]$$

$$B+C = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$I-(B+C) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -7 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}\,A^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -7 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+(-4) & 7+(-2) \\ -1+2 & -7+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{-3} & 5 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}$$

15. Opción b.

Se puede utilizar el método de Cramer o Gauss.
También calculando los rangos con los determinantes.

$$\to \overbrace{\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ \textcircled{1} & -1 & 2 & -2 \\ \textcircled{3} & \textcircled{-1} & 2 & 4 \end{array}}_{A}\right)}^{A^*} \quad \xrightarrow{-F_1+F_2} \quad \begin{array}{cccc} -1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ \hline \boxed{0} & -2 & 4 & -3 \end{array} \to F_2$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 4 & -3 \\ \textcircled{3} & -1 & 2 & 4 \end{array}\right) \quad \xrightarrow{-3F_1+F_3} \quad \begin{array}{cccc} -3 & -3 & 6 & -3 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \\ \hline 0 & -4 & 8 & 1 \end{array} \to F_3$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 4 & -3 \\ 0 & \textcircled{-4} & 8 & 1 \end{array}\right) \quad \xrightarrow{-2F_2+F_3} \quad \begin{array}{cccc} 0 & 4 & -8 & 6 \\ 0 & -4 & 8 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 7 \end{array} \to F_3$$

$$\to \begin{array}{cccc} x & y & z & N^{o} \\ \left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right. & & & \left.\begin{array}{|c} 1 \\ -3 \\ 7 \end{array}\right) \end{array} \to \left.\begin{array}{r} x+y-2z=1 \\ -2y+4z=-3 \\ 0=7 \end{array}\right\}$$

$$\nexists \text{ SOL} = \text{SI}$$

16. Opción a.

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} \overbrace{3 \quad 1 \quad 0}^{A} & & & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ 5 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right)}_{A^*}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \to \text{rg } A = 3 = \text{rg } A^* \to \underline{\text{SCD}}$$

1única sol.

17. Opción c.

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & -1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right| = -4-(2) = -6 \neq 0 \to \text{rg}(A) = 3$$

18. Opción c.

$$\exists A^{-1} \longleftrightarrow |A| \neq 0$$

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 3 & m & 0 & 3 & m \\ m & 1 & -2 & m & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right| = 0 \to 3-m^2+6=0 \to m = \pm\sqrt{9} \begin{cases} m=3 \\ m=-3 \end{cases}$$

19. Opción b.

$$B\times C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A - BC = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

20. Opción a.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & 0 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - aI = O \longrightarrow A \cdot A - a \cdot I = O$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & 0 \end{pmatrix}} - \underbrace{a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} = O$$

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Para cualquier valor de a será nula.

21. Opción b.

$$A^{10} = \underbrace{A^3}_{-I} \cdot \underbrace{A^3}_{-I} \cdot \underbrace{A^3}_{-I} \cdot A^1$$

$$-I \quad -I \quad -I \cdot A$$

$$A^{10} = -I \cdot A = \boxed{-A}$$

$$\downarrow$$

$$A \cdot \cancelto{1}{I}$$

22. Problema 22

a)

$$\overbrace{}^{A}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 \\ a & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & a & 1 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{}_{A^*}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ a & 1 & 2 \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix} = a^2 + a = 0 \rightarrow a \begin{cases} \boxed{-1} \\ \boxed{0} \end{cases}$$

- $\boxed{\text{Cuando } a=-1}$

  - $|A|_{3\times3} = 0 \leftrightarrow rg(A) \le 2$

    $|A|_{2\times2} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \longrightarrow \underline{\underline{rg(A)=2}}$

  - $|A|^{*} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow rg(A)^{*} \le 2$

    $|A|^{*}_{2\times2} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow \underline{\underline{rg(A)^{*}=2}}$ $\quad rg\,A^{*} \geq rg\,A$

Teorema Rouché

$\longrightarrow \boxed{a=-1}$

$rg(A)=2=rg(A)^{*} \rightarrow SCI$ $\quad \neq$ N° incogn.

∞ sol.

- $\boxed{\text{Cuando } a=0}$

  - $|A|_{3\times3} = 0 \leftrightarrow rg(A) \le 2$

    $|A|_{2\times2} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \longrightarrow \underline{\underline{rg(A)=2}}$

  - $|A|^{*}_{3\times3} = -1 \neq 0 \rightarrow \underline{\underline{rg(A)^{*}=3}}$

$\longrightarrow \boxed{a=0}$

$rg(A)=2 \neq rg(A)^{*}=3 \rightarrow \boxed{SI}$

$\underline{\underline{\text{NO TIENE SOL}}}$

- Cuando $\boxed{a \neq -1\ ,\ a \neq 0}$

  $|A| \neq 0 \leftrightarrow rg(A)=3$

  $rg\,A^{*} \geq rg\,A \leftrightarrow rg\,A^{*}=3$

  $rg\,A = rg\,A^{*} = 3 = N^{\circ}\,incog \longrightarrow \underline{SCD} \rightarrow \underline{1\text{ única sol}}$ $\begin{cases} \rightarrow x \\ \rightarrow y \\ \rightarrow z \end{cases}$

$|A|=0 \rightarrow$ Gauss $\quad rg(A)=2=rg(A)^{*} \rightarrow SCI$

b) $A^{*} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 - F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 + F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} x & y & z & =N^{\circ} \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow$

$$\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & +1 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{r} x-y=2 \\ 2z=2 \\ z=1 \end{array}\right\} \longrightarrow \begin{cases} x=2+\lambda \\ y=\lambda \\ z=1 \end{cases}$$

$\boxed{\infty \text{ sol. } a=-1}$

c) $\boxed{\alpha=2}$ $\quad$ Cramer

$|A|=6$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{6} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{6} \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{6}$$

$\boxed{x=1}$; $\boxed{y=-1}$; $\boxed{z=-1/2}$

23. Opción c.

$$\begin{vmatrix} 2a & 7b \\ 2c & 7d \end{vmatrix} = 2 \cdot 7 \cdot \overbrace{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}^{5} = 70$$

24. Opción c.

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right| = 4+6-0 = 10 \neq 0 \rightarrow rg(A) = 3$$

25. Problema 25

$$\left.\begin{array}{l} x = \text{N° billetes } 10\,€ \\ y = \text{N° billetes } 20\,€ \\ z = \text{N° billetes } 50\,€ \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} 10x + 20y + 50z = 28500 \\ 5y = z \\ 3y = 2x \end{array}\right] \begin{array}{l} \rightarrow z = 5y \\ \rightarrow x = \frac{3}{2}y \end{array}$$

sustitución

$$\rightarrow 10 \cdot \frac{3}{2}y + 20y + 50 \cdot 5y = 28500$$

$$\rightarrow 15y + 20y + 250y = 28500 \rightarrow \boxed{y = 100}$$

$$z = 5y \longrightarrow z = 5 \cdot 100 = \boxed{500}$$

$$x = \frac{3}{2}y \rightarrow x = \frac{3}{2} \cdot 100 = \boxed{150}$$

26. Opción c.

$$\exists A^{-1} \ si \ \ |A| \neq 0 \ \ A^{-1} = \frac{1}{|A|}(Adj\ A)^t$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} = (4-8+0)-(6+0-8) = -2$$

$$Adj\ A = \left| \begin{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \end{matrix} \right|$$

$$Adj\ A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -7 \\ 0 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \quad (Adj\ A)^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -4 & -2 & 4 \\ -7 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(Adj\ A)^t = A^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -4 & -2 & 4 \\ -7 & 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 7/2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \quad a_{22} = 1$$

27. Opción c.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 2+1\cdot(-1) & 2\cdot 1+1\cdot 3 \\ (-1)\cdot 2+3\cdot(-1) & (-1)\cdot 1+3\cdot 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -5 & 8 \end{pmatrix}$$

28. Problema 28.

$$\left.\begin{array}{l} x = \text{N° ejemplares nuevos} = 10€ \\ y = \text{N° ej usados al -40\%.} = 6€ \\ z = \text{N° ej. usados al -50\%.} = 5€ \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} x+y+z = 800 \\ 10x+6y+5z = 7110 \\ \underset{\text{proporción}}{\frac{x}{y+z} = 3} \longrightarrow \end{array}\right\} \longrightarrow x = 3y+3z$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 800 \\ 10 & 6 & 5 & 7110 \\ -1 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \text{CRAMER}: \left\{\begin{array}{l} x = 600 \ \text{NUEVOS} \\ y = 110 \ \text{al 40\%. descuento} \\ z = 90 \ \text{al 50\%. desc.} \end{array}\right.$$

29. Opción c.

$$A=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&0\\2&0&3\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{calculadora}}A^{-1}=\begin{pmatrix}3&-6&-1\\0&1&0\\\underset{\downarrow\, a_{31}}{\boxed{-2}}&4&1\end{pmatrix}$$

30. 30. Opción c.

$$\begin{vmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&0&2\end{vmatrix}=2-0=2\neq0\rightarrow rg(A)=3$$

31. Problema

$x=$ Nº balones nuevos $=22€$
$y=$ Nº bal. usados al $-20\%.$ $=17'6€$
$z=$ Nº bal. usados al $-30\%.$ $=15'4€$

$$\left.\begin{array}{l}x+y+z=500\\22x+17'6y+15'4z=10406\\y+z=\frac{x}{4}\longrightarrow 4y+4z=x\end{array}\right\}$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&500\\22&17'6&15'4&10406\\-1&4&4&0\end{array}\right)\rightarrow \text{CRAMER}:\begin{cases}x=400 & \text{NUEVOS}\\y=30 & \text{al } 20\%.\text{ descuento}\\z=70 & \text{al } 30\%.\text{ desc.}\end{cases}$$

32. Problema 32.

$x=$ Precio Prod. de A
$y=$ " de B
$z=$ " de C

$$\left.\begin{array}{l}z=x+y-360\\x+y+z=800\\1'06x+1'12y+1'3z=917'60\end{array}\right\}$$

sumamos IVA 1+%.

$$\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&800\\1&1&-1&360\\1'06&1'12&1'3&917'60\end{array}\right)\rightarrow \text{CRAMER}:\begin{cases}x=\frac{36}{0'12}=300€\text{ de A.}\\y=\frac{33'6}{0'12}=280€\text{ de B.}\\z=\frac{26'4}{0'12}=220€\text{ de C.}\end{cases}$$

33. Opción a.

$$A^{-1}=\frac{\operatorname{Adj}A^{t}}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix}1&-1\\-3&4\end{pmatrix}^{t}}{1}=\begin{pmatrix}1&-3\\-1&4\end{pmatrix}$$

34. Opción c.

$$\underset{2\times2}{\begin{pmatrix}1&-1\\-1&2\end{pmatrix}}\cdot\underset{2\times1}{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}$$

$$\text{S}$$

Debe obtenerse una matriz de 2x1

La única opción posible es la c).

35. Opción b.

$$A^{-1}=\frac{\operatorname{Adj}A^{t}}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix}2&+1\\+1&1\end{pmatrix}^{t}}{1}=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}$$

36. Opción c.

$$\begin{pmatrix}1&2\\2&3\\4&5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-1\\-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&3\\-1&4\\-1&6\end{pmatrix}$$

37. Opción a.

Inversa resuelta con calculadora.

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1/2&0\\0&1/2&0\\0&0&1/3\end{pmatrix}$$

$$1+0+0=\boxed{1}$$

38. Opción c.

para $a = 1$

$$\overset{A^*}{\underset{A}{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)}} \rightarrow$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow rg(A) = 2$$

$$|A|^* = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \rightarrow rg(A^*) = 3$$

$$rg(A) \neq rg(A^*) = SI.$$