EXAMEN JUNIO 2018 – RESUELTO

1. El rango de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{es:}$$

a) 1. *b*) 2. ~~*c*)~~ 3.

2. El conjunto de soluciones del sistema

$$\begin{cases} x + y + z &= 0 \\ x - y - z &= 0 \end{cases}$$

define:

a) Un punto en el espacio.
~~*b*)~~ Una recta en el espacio.
c) Un plano en el espacio.

3. El valor del límite

$$\lim_{x \to 0} \frac{x \operatorname{sen} x}{\log(1 + x^2)}$$

(donde log significa logaritmo neperiano), es:

~~*a*)~~ 1. *b*) π. *c*) $\pi/2$.

4. Las rectas:

$$r_1 \; : \; \frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-1}{1}$$
$$r_2 \; : \; \frac{x-2}{1} = \frac{y-k}{1} = \frac{z-2}{2}$$

se cortan en un punto para el valor de k:

a) $k = 0$. ~~*b*)~~ $k = 1$. *c*) $k = 2$.

5. El área del triángulo cuyos vértices son los puntos $P = (1, 2, -3), Q = (-2, 1, 0)$ y $O = (0, 0, 0)$ es:

a) $\frac{\sqrt{70}}{\sqrt{2}}$. *b*) $\frac{70}{\sqrt{2}}$. ~~*c*)~~ $\frac{\sqrt{70}}{2}$

6. El coseno del ángulo θ formado por los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$, determinados por los puntos $A(2, 1, 0), B(3, 0, 0)$ y $C(4, 1, 2)$, es:

a) $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
~~*b*)~~ $\cos\theta = \frac{1}{2}$.
c) $\cos\theta = 0$.

7. La función

$$f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$$

corta al eje X en:

~~*a*)~~ Un único punto.
b) Dos únicos puntos.
c) Tres puntos.

8. La gráfica de la función

$$f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$$

tiene como asíntota la recta:

a) $x = 3$.
~~*b*)~~ $y = x + 2$.
c) $y = -x + 2$.

9. Sean A y B dos sucesos de un espacio muestral E, donde $\overline{A}$ y $\overline{B}$ denotan los sucesos contrarios. Tenemos asignada una probabilidad en E de modo que $P(A \cap B) = 1/9$ y $P(A \cap \overline{B}) = 2/9$, entonces:

~~*a*)~~ $P(B|A) = 1/3$.
b) $P(B|A) = 2/81$.
c) $P(B|A) = 1/9$.

10. La integral

$$\int_0^{\pi/4} x \operatorname{sen} x \, dx$$

vale:

~~*a*)~~ $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$. *b*) $\frac{1}{2}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$. *c*) 0.

1. Estudiar la posición relativa de los planos

$$\begin{aligned} \pi_1 &: mx + z = 1 \\ \pi_2 &: my - z = 0 \\ \pi_3 &: (m+1)x + y + 2z = m + 1 \end{aligned}$$

según los valores de m.

2. Hallar las asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función:

$$f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$$

Hacer un esbozo de la gráfica de f.

1) $|A| = m^2 \rightarrow m^2 = 0 \rightarrow m = 0$

Si m =0 → Por el Teorema de Roché Frobenius →SCD y los 3 planos se cortan en un punto.

Si m≠0 → Por el Teorema de Roché Frobenius → SI y hay 2 planos paralelos que cortan al otro.

2) Dominio: R excepto los valores que anulan el denominador, es decir:

$e^x - 1 = 0 \rightarrow e^x = 1 \rightarrow x = 0 \rightarrow \text{Dom}(f) = R - \{0\}$

AV: ¿x=0? → $\lim_{x\to 0} \frac{x}{e^x-1} = \frac{0}{0} \rightarrow$ L'H $\rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{1}{e^x} = 1 \rightarrow$ No tiene

AH: $\lim_{x\to \infty} \frac{x}{e^x-1} = \frac{\infty}{\infty} \rightarrow$ L'H $\rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = \frac{1}{\infty} = 0 \rightarrow$ Tiende a 0 en +∞ → **y=0**

$\lim_{x\to -\infty} \frac{x}{e^x-1} = \frac{-\infty}{0} \rightarrow$ No tiene

AO: Como tiene AH en +∞, estudiamos si tiene AO en −∞:

$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{(e^x-1)x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{(e^x-1)} = -1$

$n = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{(e^x-1)} - (-1)x = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{(e^x-1)x} + x = \lim_{x\to-\infty} \frac{xe^x}{(e^x-1)x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{(e^x-1)} = 0$

y = −x cuando x→−∞

Monotonía:

f'(x) = $\frac{(e^x-1)-x(e^x)}{(e^x-1)^2} = \frac{e^x-1-xe^x}{(e^x-1)^2} = 0 \rightarrow e^x - 1 - xe^x = 0 \rightarrow e^x(1-x)=1 \rightarrow x=0$, pero no será máximo ni mínimo porque no pertenece al dominio.

Estudiamos el signo de f '(x):

f '(x)	-1		1	
	-	0	-	Siempre **decrece**

pues en x=0 no cambia de signo

Esbozo: