Examen matemáticas JUNIO 2018 PAU UNED

1. Sean las rectas r y s de ecuaciones

$$r : \begin{cases} x - 2y &= 0 \\ y - z &= 1 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x - y &= 1 \\ y + z &= a \end{cases}$$

Estudiar si existe un valor de a para que las rectas estén en un mismo plano π y en tal caso calcular la ecuación de este plano.

Obtenemos previamente las ecuaciones paramétricas de la recta:

$$r \equiv \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = \mu \\ z = a - \mu \end{cases}$$

$$\overrightarrow{v_r} = (2,1,1) \quad P_r = (0,0,-1) \quad \overrightarrow{v_s} = (1,1,-1) \quad P_s = (1,0,a)$$

Las rectas r y s estarán contenidas en un plano si son paralelas o se cortan en un punto.

Veamos si son paralelas, ¿son proporcionales sus vectores directores?

Como $\frac{2}{1} \neq \frac{1}{1} \neq \frac{1}{-1}$ entonces los vectores no son proporcionales, las rectas no son paralelas.

En consecuencia las rectas r y s deben cortarse. Para que se corten el siguiente sistema debe tener solución,

Arreglamos el sistema considerando que las incógnitas son λ y , μ

$$\overrightarrow{P_r\,P_s} = \big(1 - 0, 0 - 0, a - (-1)\big) = (1,0,a+1)$$

Por ser un sistema de 2 incógnitas y 3 ecuaciones, para que tenga solución el determinante de la matriz ampliada debe ser nulo, es decir:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & a+1 \end{vmatrix} = 0 \qquad a - 1 = 0 \qquad a = 1$$

Por lo tanto, para a = 1 las rectas r y s están contenidas en un plano

$$\pi \equiv \begin{cases} \overrightarrow{v_r} = (2,1,1) \\ \overrightarrow{v_s} = (1,1,-1) \\ P_r = (0,0,-1) \end{cases} \qquad \pi \equiv \begin{vmatrix} 2 & 1 & x-0 \\ 1 & 1 & y-0 \\ 1 & -1 & z+1 \end{vmatrix} = 0 \qquad -2x + 3y + z + 1 = 0$$

2. Hallar las asíntotas de la función:

$$f(x) = \frac{x^3}{(1-x)^2}$$

indicando los intervalos de crecimiento

Dominio y asíntotas.

Dominio:

$$(1-x)^2 = 0 \qquad (1-x) = 0 \quad x = 1$$

Por tanto, Dom f(x) =$\Re \sim \{ 1 \}$

Asíntotas.

Asíntotas verticales,

Las posibles asíntotas verticales son x=1. Comprobemos.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3}{(1-x)^2} = \frac{1}{0} = \infty$$

por tanto x = 1 es asíntota vertical.

Asíntota horizontal,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{(1-x)^2} = \frac{\infty}{\infty} \ \ regla\ de\ l'Hôpital(derivamos) \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2}{-2(1-x)^2} = \frac{\infty}{\infty} \ \ L.H \ \ \lim_{x\to\infty} \frac{6x}{2} = \infty$$

, por tanto no hay la asíntota horizontal

Asíntota oblicua,

m=$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$ $\quad m = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^3}{(1-x)^2}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x(1-x)^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x-x^3} = \frac{\infty}{\infty} \ \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^3}{x^3}}{\frac{x-x^3}{x^3}} = \frac{1}{0+1} = 1 \quad m = 1$

$$\begin{aligned} n = \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx) &= \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{(1-x)^2} - x = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{(1-x)^2} - \frac{x(1-x)^2}{(1-x)^2} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{(1-x)^2} - \frac{x(x^2-2x+1)}{(1-x)^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{(1-x)^2} - \frac{x^3-2x^2+x}{(1-x)^2} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{x^3-x^3+2x^2-x}{(1-x)^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-x}{x^2-2x+1} = \frac{\infty}{\infty} \end{aligned}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x^2}{x^2} - \frac{x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{2x}{x^2} + \frac{1}{x^2}} = \frac{2-0}{1-0+0} = 2 \qquad n = 2$$

La asintota oblicua es $y = x + 2$

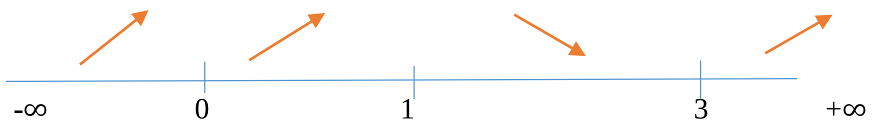
Crecimiento y decrecimiento:

Calcularemos la derivada primera de la función:

$$f(x)' = \frac{3x^2 \cdot (1-x)^2 \quad - x^3 \cdot \left(-2(1-x)\right)}{(1-x)^2} = \frac{3x^2(1-x) + 2x^3}{(1-x)^3} = \frac{3x^2 - 3x^3 + 2x^3}{(1-x)^3} = \frac{-x^3 + 3x^2}{(1-x)^3}$$

$$f(x)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2} \qquad u = x^3 \;\; u' = 3x^2 \quad v = (1-x)^2 \quad v' == -2 + 2x$$

$$f(x)' = \frac{-x^3 + 3x^2}{(1-x)^3} \qquad \begin{cases} -x^3 + 3x^2 = 0 & x^2(-x+3) = 0 & x = 3 \quad x = 0 \\ (1-x)^3 \quad = 0 & (1-x) = 0 & x = 1 \end{cases}$$



Crecimiento (-∞, $1)U(3, +\infty)$

Decrecimiento (1,3)

Examen matemáticas JUNIO 2018 PAU UNED

Preguntas de test

1. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

la suma de los elementos de la primera columna de su matriz inversa A^{-1} es:

a) 1. b) 0. c) -1.

2. La distancia entre el plano

$$\pi : 8x + 2y + z - 1 = 0,$$

y el punto $P = (-1, 4, 1)$ es:

a) 0. b) $\sqrt{69}$. c) $25/\sqrt{69}$.

3. La gráfica de la función

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}.$$

presenta:

a) La asíntota $y = x + 1$.
b) La asíntota $y = x - 1$.
c) Dos asíntotas verticales.

4. Si $a, b, c \neq 0$, la ecuación del plano que pasa por los puntos $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$ y $C(0, 0, c)$ es:

a) $ax + by + cz = 1$.
b) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.
c) $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$.

5. Sea el sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & ay & + & z & = & 1 \\ ax & + & y & + & (a-1)z & = & 1 \\ x & + & ay & + & z & = & a+1 \end{array} \right.$$

para el valor $a = 1$ el sistema es:

a) Compatible determinado.
b) Compatible indeterminado.
c) Incompatible.

6. El coseno del ángulo θ formado por los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$, donde $A = (1, 2, -3)$, $B = (-2, 1, 5)$ y $C = (1, 1, -4)$ es:

a) $\cos\theta = \frac{7}{\sqrt{74}\sqrt{2}}$.
b) $\cos\theta = \frac{-7}{\sqrt{74}\sqrt{2}}$.
c) $\cos\theta = \frac{-21}{\sqrt{30}\sqrt{18}}$.

7. La integral

$$\int_0^{\pi/2} e^x \operatorname{sen} x \, dx$$

vale:

a) $\frac{1}{2}e^{\pi/2} + \frac{1}{2}$. b) $\frac{1}{2}e^{\pi/2} - \frac{1}{2}$. c) 0.

8. Las rectas

$$r_1 : \frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-1}{1}$$
$$r_2 : \frac{x-2}{1} = \frac{y-k}{1} = \frac{z-2}{2}$$

se cortan en un punto:

a) Para $k = 2$.
b) Para $k = -1$.
c) Para $k = 1$.

9. Dado el conjunto $C = \{a, b, c, d, e\}$ y la familia de subconjuntos

$$\mathcal{S} = \{\varnothing, \{b\}, \{b, e\}, \{a, c, d\}, \{a, c, d, e\}\}$$

entonces esta familia es un álgebra de sucesos si se completa con:

a) Un suceso.
b) Dos sucesos.
c) Tres sucesos.

10. En la clase de 1er de la Facultad de Medicina el 60 % son chicas y el 40 % chicos. El 25 % de las chicas y el 15 % de los chicos escucha música mientras estudia. Si una persona elegida al azar dentro de esta clase, escucha música mientras estudia, ¿Cuál es la probabilidad de que sea chica?

a) 15/21.
b) 10/21.
c) 25/40.