Examen matemáticas JUNIO 2017 PAU UNED

Problemas

Problema 1 *(2,5 puntos)*

Se desea recargar el cajero de un banco con billetes de 10, 20 y 50 euros. Por cada 5 billetes de 50 se ha de introducir 1 de 20, mientras que por cada 2 billetes de 20 se han de introducir 3 de 10.

- Plantear un sistema de ecuaciones para determinar la proporción de cada una de las denominaciones de billetes que hay introducir en el cajero.
- Resolver el sistema mediante la regla de Cramer.
- Si el importe total en euros de todos los billetes ha de ser 28500 euros ¿cuánto billetes de cada denominación hay que introducir en el cajero?

$x = 50\text{ €} \quad y = 20\text{ €} \qquad z = 10\text{ €}$

Sistema de ecuaciones con las proporciones de cada una de las denominaciones de billetes que hay que introducir en el cajero:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ \dfrac{x}{5} = y \\ \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{3} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - 5y = 0 \\ 3y - 2z = 0 \end{cases}$$

Resolvemos mediante la regla de Cramer:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix} \qquad |M| = (10 + 3 + 0) - (0 - 2 + 0) = 15 \neq 0$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \end{vmatrix}}{|M|} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}}{|M|} = \frac{2}{15} \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix}}{|M|} = \frac{3}{15}$$

El importe total es de 28500 €, hay que introducir los siguientes billetes, para ello previamene hay que calcular la siguiente ecuación lineal.

$$\begin{cases} 50x + 20y + 10z = 28500 \\ x - 5y = 0 \\ 3y - 2z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 5y \\ z = \dfrac{3}{2}y \end{cases}$$

Resolvemos por sustitución:

$$5 \cdot 5y + 2y + \frac{3}{2}y = 2850 \qquad 27y + \frac{3}{2}y = 2850$$
$$\frac{57y}{2} = 2850 \qquad 57y = 5700 \qquad y = \frac{5700}{57} = 100$$

$$x = 5 \cdot 100 = 500 \qquad z = \frac{3}{2} \cdot 100 = 150$$

Hay que introduccir los siguientes billetes: 500 de 50€, 100 billetes de 20€ y 150 billetes de 10€.

Problema 2 *(2,5 puntos)*

Los beneficios netos de una empresa, en millones de euros, se pueden aproximar mediante la expresión

$$f(t) = \frac{30t - 60}{5t + 7}$$

donde $t > 0$ representa los años de vida de la empresa.

- Explicar razonadamente a partir de qué año la empresa obtiene beneficios netos no negativos.
- ¿Pueden crecer indefinidamente los beneficios netos de la empresa a medida que transcurre el tiempo t? En caso afirmativo, justificarlo formalmente. En caso negativo, determinar un valor que limite superiormente dichos beneficios netos.

$$f(t) = \frac{30t - 60}{5t + 7} \qquad t > 0$$

$$f(t) > 0 \quad Si \ \ t > 0 \quad 5t + 7 > 0 \qquad f(t) > 0 \quad si \ \ 30t - 60 > 0$$

resolvemos la inecuación:

$$30t - 60 > 0 \qquad 30t > 0 \qquad t > \frac{30}{30} \qquad t > 2$$

A partir del segundo año de vida la empresa tienen benebicios netos no negaticos.

- La empresa no puede crecer indefinidmente, para determinar un valor limite debemos calcular el limite que tiende a un $t \to \infty$.

  Este límite en principio toma la forma indeterminada $\frac{\infty}{\infty}$, y lo resolvemos aplicando directamente la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{t \to \infty} \frac{30t - 60}{5t + 7} = \frac{\infty}{\infty} \qquad \lim_{t \to \infty} \frac{30}{5} = 6$$

  El valor limite es de 6 millones.

Examen matemáticas JUNIO 2017 PAU UNED

Preguntas de test

1. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ y sea A^{-1} su matriz inversa. Entonces el elemento a_{22} de la segunda fila y segunda columna de la matriz inversa A^{-1} es

a) 0.

b) -1.

c) 1.

$$\exists A^{-1} \ si \ \ |A| \neq 0 \ \ A^{-1} = \frac{1}{|A|}(Adj\ A)^t$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} = (4 - 8 + 0) - (6 + 0 - 8) = -2$$

$$Adj\ A = \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

$$Adj\ A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -7 \\ 0 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \qquad (Adj\ A)^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -4 & -2 & 4 \\ -7 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(Adj\ A)^t = A^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -4 & -2 & 4 \\ -7 & 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 7/2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \quad a_{22} = 1$$

2. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. Entonces

a) $A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$

b) $A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 9 \end{pmatrix}$

c) $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -5 & 8 \end{pmatrix}$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) & 2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 \\ (-1) \cdot 2 + 3 \cdot (-1) & (-1) \cdot 1 + 3 \cdot 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -5 & 8 \end{pmatrix}$$

3. El valor del $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1 + \sqrt{x}}{2x - 3}$ es igual a

a) 1.

b) 0.

c) 1/2.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1 + \sqrt{x}}{2x - 3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{4\sqrt{x}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

4. La integral $\int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{2}} \cos(x)\, dx$ vale

a) 0.

b) -1.

c) 2.

$$\int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{2}} \cos x\ dx = [sen\ x]_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{x}} = \left[sen\ \frac{5\pi}{2}\right] - \left[sen\ \frac{3\pi}{2}\right] = 1 - (-1) = 2$$

Examen matemáticas JUNIO 2017 PAU UNED

5. El vector director de la recta

$$r \equiv x = 2t+1, \qquad y = 3t-1, \qquad z = t-7$$

es el vector

a) (1,-1,-7).
b) (2,3,1).
c) (3,2,-6).

6. Los planos

$$\begin{aligned} \alpha &\equiv \quad x + \ y - \ 5z = -4 \\ \beta &\equiv -3x - 3y + 15z = \ 1 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{-3} = \frac{1}{-3} = \frac{-5}{15} \neq \frac{-4}{1}$$

a) se cortan en una recta.
b) son paralelos.
c) son coincidentes.

7. La distancia del punto $A = (1,2,5)$ al plano

$$\alpha \equiv 2x + 2y - z - 5 = 0$$

vale

a) $5/3$.
b) $2/3$.
c) $4/3$.

$$d(A,\alpha) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$d(A,\alpha) = \frac{|2\cdot 1 + 2\cdot 2 + (-1)\cdot 5 - 5|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \frac{|-4|}{3} = \frac{4}{3}\ u$$

8. Si A y B son sucesos de un espacio de probabilidad, la afirmación $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ es correcta

a) si A y B son sucesos disjuntos.
b) si A y B son sucesos independientes.
c) para cualquier par de sucesos A y B.

$$P(A \cup B) = P(A) + p(B)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + p(B) - P(A \cap B) \quad (A \cap B) = \emptyset$$

9. Si A y B son sucesos tales que $P(A) = 0,3$ y $P(B|A) = 0,45$, entonces $P(A \cap B)$ vale

a) 0,135.
b) 0,15.
c) 0,25.

$$P(A) = 0{,}3 \qquad P(B/A) = 0{,}45$$

$$P(B/A) = \frac{P(B\cap A)}{P(A)} \qquad 0{,}45 = \frac{P(B \cap A)}{0{,}3}$$

$$P(B \cap A) = 0{,}45 \cdot 0{,}3 = 0{,}135$$

10. Una población está compuesta en un 60% de mujeres. El 14% de las mujeres y el 22% de los hombres son fumadores. Si una persona elegida al azar fuma, la probabilidad de que sea una mujer es

a) 0,342.

b) 0,488.

c) 0,556.

$$P(M) = \frac{60}{100} \quad P(H) = \frac{14}{100}$$

$$P(F/M) = \frac{14}{100} = 0{,}14 \quad P\,(F/H) = \frac{22}{100} = 0{,}22$$

$$P(M/F) = \frac{P(M) \cdot P(F/M)}{P(M) \cdot P(F/M) + P(H) \cdot P(F/MH)} = \frac{0{,}6 \cdot 0{,}14}{0{,}6 \cdot 0{,}14 + 0{,}4 \cdot 0{,}22} = 0{,}488$$